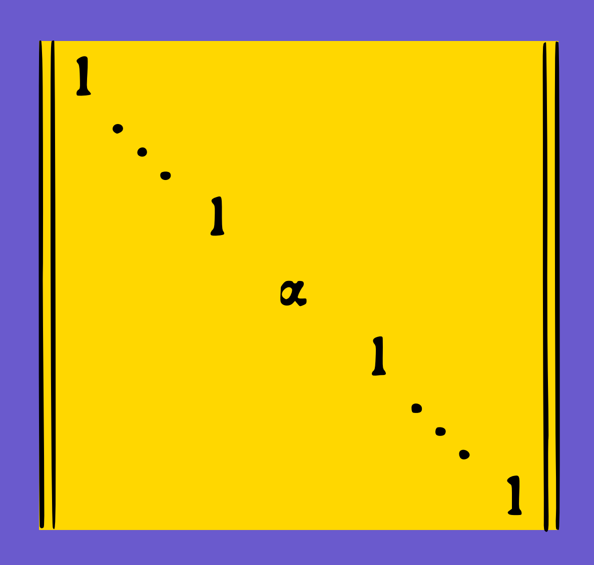
H. Ikramov

RECUEIL DE PROBLMÈES D'ALGÈBRE LINÉAIRE



Éditions Mir Moscou

Х. Д. ИКРАМОВ

ЗАДАЧНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

H. IKRAMOV

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ALGÈBRE LINÉAIRE

sous la direction
de V. Voïévodine

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par
VALENTIN POLONSKI

На французском языке

PRÉFACE

Le cours d'algèbre linéaire et de géométrie analytique est enseigné aux élèves de la Faculté de Calcul numérique et de Cybernétique (CNC) de l'Université Lomonossov de Moscou pendant les deux premiers semestres. Le conférencier qui présente cette discipline affronte des problèmes bien ardus. Pour les élucider, faisons quelques comparaisons avec le programme des cours analogues des Facultés de Mathématiques et, en particulier, avec celui de la Faculté de Mathématiques et de Mécanique de l'Université.

Le programme de CNC est constitué par la plus grande partie du cours de géométrie analytique professé à la Faculté de Mathématiques et de Mécanique (sauf seulement la classification affine des coniques et des quadriques, ainsi que les éléments de géométrie projective) et par un cours complet d'algèbre linéaire. Ce dernier traite également des questions généralement omises à la Faculté de Mathématiques et de Mécanique, telles, par exemple, les nombres singuliers d'un opérateur, les pseudo-solutions des systèmes d'équations linéaires, etc. Le caractère spécial de CNC oblige le conférencier d'attirer l'attention des étudiants sur l'instabilité de la plupart des notions d'algèbre classique (dépendance linéaire, dégénérescence, structure de Jordan, etc.) et de ses méthodes, ainsi que d'indiquer les voies qui conduisent aux solutions stables des problèmes d'algèbre. La réalisation de ce programme impose l'introduction dans le cours des éléments de la théorie des espaces vectoriels normés pour obtenir par la suite des résultats métriques concrets sous la forme des estimations des perturbations de la solution d'un système d'équations, des valeurs propres d'une matrice, etc. Or, les délais pour enseigner tout ceci sont bien plus courts que ceux prévus pour les cours d'algèbre et de géométrie professés aux Facultés de Mathématiques, et, de plus, il ne faut rien perdre en rigueur mathématique.

Il est clair qu'il est impossible de suffir à la tâche sans remanier sensiblement le cours traditionnel. L'« Algèbre linéaire » de V. Voïévodine constitue précisément une tentative dans ce domaine. Cet ouvrage a fixé l'expérience de l'auteur qui a enseigné pendant plusieurs années à CNC.

Voici quelques traits particuliers du cours de V. Voïévodine, qui ont permis de réduire sensiblement le temps nécessaire pour l'exposer.

La notion d'espace vectoriel bien acquise de l'algèbre vectorielle est

donnée tout au début du cours. On élimine ainsi le parallélisme traditionnel, la théorie de l'espace vectoriel étant exposée à trois reprises, d'abord dans la géométrie analytique (ensembles des vecteurs géométriques), puis pour décrire la structure de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires dans un espace arithmétique, puis, enfin, dans le cas général.

Dans les chapitres qui suivent, la géométrie et l'algèbre sont présentées successivement : chaque nouvelle notion géométrique amène une généralisation consécutive. Ainsi, le produit scalaire des vecteurs géométriques permet d'introduire les espaces euclidiens et unitaires; la formule du volume de parallélépipède tridimensionnel impulse la construction de la théorie des volumes de dimension *n*, d'où l'on déduit également la théorie du déterminant envisagé comme un volume orienté de parallélépipède dans un espace arithmétique; les droites et les plans d'un espace tridimensionnel fournissent le prétexte qui permet d'introduire la notion de plan dans un espace arbitraire; le problème géométrique de l'intersection des hyperplans révèle la construction d'un ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires. Il existe des exemples opposés, lorsque les résultats géométriques se déduisent comme de simples corollaires des théorèmes algébriques généraux; il en est ainsi, par exemple, de la classification cartésienne des coniques et des quadriques.

La modification du cours entraîne celle du programme des séminaires. Il s'est avéré que les recueils de problèmes d'algèbre linéaire existants (D. Faddéïev, I. Sominski, « Recueil de problèmes d'algèbre supérieure », I. Proskouriakov, « Recueil de problèmes d'algèbre linéaire » (en russe)) ne sont que très peu utilisables. Dans ces deux ouvrages on suppose que les étudiants connaissent déjà les méthodes d'algèbre matricielle et les systèmes d'équations linéaires et peuvent résoudre les problèmes sur des espaces vectoriels et euclidiens. Or, dans notre cas, comme nous l'avons montré, cette condition n'est pas remplie. De plus, il fallait donner des problèmes sur des chapitres du cours non classiques. Il s'en est suivi la nécessité d'un nouveau recueil de problèmes adapté au cours de V. Voïévodine que nous présentons au lecteur.

La structure du recueil est définie par celle de l'ouvrage de V. Voïévodine. Des écarts négligeables sont conditionnés par les particularités de l'enseignement. Ainsi, le paragraphe consacré aux espaces métriques est rapporté au chapitre 8, puisque le thème correspondant du cours est exposé à la fin même du premier semestre, et le temps manque pour « consolider » les connaissances acquises aux séminaires.

La succession des sujets retenue par V. Voïévodine pose certains problèmes pour un auteur de recueil. Ainsi, pour résoudre les problèmes de calcul des deux premiers chapitres, il est impossible de recourir à des méthodes matricielles et à la plupart des résultats fournis par l'étude des systèmes d'équations linéaires. Il s'avère, pourtant, que dans les espaces vectoriel et euclidien il suffit à cet effet de combiner les transformations élémentaires des systèmes de vecteurs à la méthode de Gauss envisagée comme une méthode permettant de vérifier la compatibilité, la définition

et la recherche d'une solution *quelconque* d'un système d'équations linéaires (pour plus de détails, cf. §§ 1.0 et 2.0). C'est ce qui fait que dans l'ouvrage de V. Voïévodine la méthode de Gauss est décrite au chapitre 2, exactement là où l'on en a besoin pour les leçons du séminaire. Les problèmes qui font appel à *toutes* les solutions d'un système d'équations linéaires sont donnés dans le recueil seulement à partir du chapitre 4. Remarquons que le principe appliqué ici est le même que celui de l'ouvrage de A. Kurosh « Cours d'algèbre supérieure » qui débute par la description de la méthode d'élimination successive des inconnues.

Le lecteur verra que les premiers six chapitres du recueil et certains paragraphes du chapitre 7 sont consacrés à des sujets tout ce qu'il y a de plus classiques. Mais là aussi, pour marquer le caractère particulier de CNC, l'auteur a voulu insister sur les aspects numériques des questions examinées. C'est pourquoi au § 3.4 les nombreuses questions relatives à la réalisation numérique de la méthode de Gauss tiennent une grande place. C'est aussi pourquoi, dans plusieurs cas, des algorithmes de calcul très efficaces dans la pratique sont présentés sous la forme d'une suite de problèmes.

Quelques paragraphes des deux derniers chapitres correspondent aux nouvelles sections du cours de V. Voïévodine et sont pour la première fois publiés dans des recueils de problèmes d'algèbre linéaire.

Une condition nécessaire que doit remplir tout recueil de problèmes est de contenir en nombre suffisant des problèmes utiles et étoffés pour le travail des séminaires, les devoirs, les travaux de contrôle et les épreuves. L'auteur espère s'acquitter de cette tâche. Par ailleurs, cette dernière a été envisagée d'une façon plus large, en voulant offrir aux plus forts des élèves des matières pour qu'ils puissent travailler indépendamment et leur permettre dans certains cas de résoudre des problèmes actuels de calcul numérique. Ainsi, on trouvera dans l'ouvrage l'hypothèse de Wilkinson sur la rapidité d'augmentation des éléments dans la méthode de Gauss (§ 3.4), la description de l'algorithme de Strassen pour la multiplication rapide des matrices (§ 5.4), les résultats de Wilkinson sur les valeurs propres mal conditionnées (§ 8.4), etc.

Encore quelques remarques sur l'utilisation du recueil.

Le numéro de chaque problème compte trois nombres : le premier renvoie au chapitre, le deuxième, au paragraphe, le troisième, au problème du paragraphe. Une numérotation analogue est employée pour les formules auxquelles on se réfère par la suite. Cette dernière numérotation est indépendante de celle des problèmes.

Pour la commodité du lecteur, chaque chapitre est précédé de paragraphe « nul » qui définit les notions et, quelquefois, les méthodes appliquées dans le chapitre. Pour rendre plus facile la recherche de la « source » de tel ou tel terme, à la fin du livre on a placé un index.

Certains problèmes sont marqués par des astérisques prévus pour attirer l'attention. Si c'est un problème à démontrer, cela signifie qu'on y trouve une formulation importante (quelle que soit la complexité de la démonstration), ou bien qu'il impose certains raisonnements particuliers.

Un problème de calcul muni d'un astérisque admet une solution spéciale qui exige dans le cas type l'application d'une proposition théorique. De nombreux problèmes marqués d'un astérisque sont accompagnés d'indications ou de solutions et, quoi qu'il en soit, la clé de leur solution se trouve ou bien dans le recueil même, ou bien dans l'ouvrage de V. Voïévodine. D'autre part, des indications ou des solutions sont données pour de nombreux problèmes sans astérisques pour montrer quelle est d'après l'auteur la meilleure approche. Il faut ajouter que le plus souvent les problèmes sont réunis en groupes où le problème principal est muni d'un astérisque, tandis que les autres ne sont que des conséquences de ce problème principal. Aussi, la disposition même fournit une information sur le problème considéré.

En composant le recueil, l'auteur a puisé dans de nombreuses sources; il serait impossible de les mentionner toutes ici. Le travail de l'auteur a été simplifié par l'existence de plusieurs ouvrages excellents d'algèbre linéaire et, notamment, des recueils déjà cités. Dans plusieurs cas, des propositions tirées des articles ont été énoncées sous la forme de problèmes.

Cet ouvrage a été rédigé sur l'initiative des professeurs V. Voïévodine et I. Bérézine. L'auteur est heureux de profiter de l'occasion pour leur exprimer sa profonde gratitude. Sa reconnaissance va également aux professeurs d'algèbre de CNC qui ont collaboré à la conception de ce livre.

H. Ikramov

CHAPITRE PREMIER

ESPACES VECTORIELS

§ 1.0. Terminologie et généralités

Appelons un ensemble V *espace vectoriel sur le corps* numérique P, si

A. L'*addition* par rapport à laquelle V est un groupe commutatif (abélien) est définie pour tous les éléments de V. Cela signifie que les propriétés suivantes sont respectées :

1. L'addition est commutative : $x+y=y+x$.
2. L'addition est associative : $(x+y)+z=x+(y+z)$.
3. Il existe dans V un *élément nul* 0 (et un seul) qui vérifie la condition : $x+0=x$ pour tout x de V.
4. Pour tout élément x de V il existe un *élément opposé* $-x$ (et un seul) tel que $x+(-x)=0$.

B. La *multiplication par un nombre* du corps P est définie pour tous les éléments de V. Quels que soient les éléments x, y de V et quels que soient les nombres α, β de P, les propriétés suivantes doivent être respectées :

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.
2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.
3. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.
4. $1\cdot x=x$.

Aux éléments d'un *espace vectoriel* nous donnerons le nom de *vecteurs*.

Si P est un corps des nombres réels ou complexes, l'espace vectoriel sur P est dit *réel* ou *complexe* respectivement.

Dans notre ouvrage, sauf quelques problèmes du chapitre premier, *nous n'étudions que des espaces réels et complexes.*

Dans un cas particulier, l'espace V se compose d'un seul élément (cf. problème 1.1.1). Disons qu'un tel espace vectoriel est *nul* (ou *trivial*) et dans ce qui suit notons-le O. Le nombre d'éléments de tous les autres espaces réels et complexes est infiniment grand.

Disons que le vecteur

$$y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_kx_k,$$

est une *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, x_2, $\ldots$, x_k, ou qu'il *s'exprime linéairement* par ces vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires d'un système fixé de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ s'appelle *enveloppe linéaire* de ce système, notée $L(x_1, \ldots, x_k)$.

Un système de vecteurs x_1, $\ldots$, x_k est dit *linéairement dépendant* si

au moins l'un des vecteurs x_i s'exprime linéairement par les autres vecteurs du système, et *linéairement indépendant*, dans le cas contraire. A cette définition est équivalente la définition suivante : un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ est linéairement dépendant s'il existe des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dont au moins un est différent de zéro et tels que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0,$$

et linéairement indépendant si cette égalité n'est possible que lorsque tous les α_i sont nuls.

La dépendance linéaire d'un système de deux vecteurs x, y signifie notamment que ou bien $y=\alpha x$, ou bien $x=\beta y$. De tels vecteurs x et y sont dits *colinéaires*.

On a le *théorème fondamental de la dépendance linéaire* suivant : si chacun des vecteurs d'un système linéairement indépendant $y_1, \ldots, y_l$ s'exprime linéairement par le système $x_1, \ldots, x_k$, on a $l \leq k$.

Le système linéairement indépendant de vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ par lequel s'exprime linéairement chaque vecteur de l'espace V s'appelle *base* de l'espace. Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il possède une base, et *de dimension infinie* dans le cas contraire.

A partir du § 1.4 *nous examinons seulement les espaces vectoriels à dimensions finies.*

Toutes les bases d'un espace V de dimension finie se composent d'un même nombre n de vecteurs; le nombre n s'appelle *dimension* de l'espace V et on le note $\dim V$. L'espace V lui-même est dit alors *de dimension n.* Par définition, $\dim O=0$.

Les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la décomposition du vecteur x suivant la base $e_1, \ldots, e_n$,

$$x=\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

s'appellent *coordonnées* de ce vecteur.

Deux espaces vectoriels donnés sur le même corps sont dits *isomorphes* si on établit entre leurs vecteurs une correspondance biunivoque; de plus, l'image de la somme de deux vecteurs est alors la somme de leurs images, et l'image du produit d'un vecteur par un nombre est le produit de l'image de ce vecteur par le même nombre. La condition nécessaire et suffisante d'une correspondance isomorphe entre deux espaces vectoriels est la coïncidence de leurs dimensions.

Un sous-ensemble L d'un espace vectoriel V s'appelle *sous-espace vectoriel* de cet espace si par rapport aux opérations introduites dans V il constitue lui-même un espace vectoriel.

Si L_1 et L_2 sont des sous-espaces vectoriels de V, l'ensemble des vecteurs appartenant aussi bien à L_1 qu'à L_2 s'appelle *intersection* de ces sous-espaces notée $L_1 \cap L_2$. On appelle *somme* des sous-espaces L_1 et L_2 l'ensemble des sommes x_1+x_2, où $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. La somme des sous-espaces est notée L_1+L_2. Si pour chaque vecteur x de $L=L_1+L_2$ la représentation

$$x=x_1+x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

est unique, on dit que L est *somme directe* des sous-espaces L_1 et L_2 et on écrit $L_1 \dot{+} L_2$.

La plupart des problèmes de calcul de ce recueil sont associés à deux espaces vectoriels concrets. Voici une description plus détaillée de ces derniers.

1. Espace arithmétique de dimension n. Ses éléments sont des collections ordonnées de n nombres réels ou complexes appelées *vecteurs de dimension n*. On dit espace arithmétique réel ou complexe et on note R_n et C_n respectivement. Si les vecteurs de dimension n sont mis sous la forme

$$x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

les opérations sur ces vecteurs sont définies par les égalités

$$x+y=(\alpha_1+\beta_1, \ \alpha_2+\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n+\beta_n),$$
$$\lambda x=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Parmi les bases d'un espace arithmétique il y a une privilégiée par la nature même de cet espace. Nous appelons cette base, composée de *vecteurs unités*

$$\begin{aligned} e_1&=(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ e_2&=(0, 1, 0, \ldots, 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n&=(0, 0, 0, \ldots, 1), \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

base naturelle d'un espace arithmétique. Son caractère particulier consiste dans le fait que dans cette base les coordonnées du vecteur $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eux-mêmes et il est donc inutile de les calculer.

2. Espace des polynômes de degré $\leq n$. Le polynôme de degré k

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_kt^k, \quad a_k\neq 0, \tag{1.0.2}$$

est envisagé comme un objet parfaitement défini par une collection ordonnée de coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_k$, et l'égalité de deux polynômes, comme la coïncidence de leurs coefficients de même indice. Des coefficients d'un polynôme peuvent être des nombres réels ou complexes; dans les problèmes on considère généralement le premier cas, et, dans cet ouvrage, l'espace des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels est noté M_n. Les nombres réels ou complexes eux-mêmes sont considérés comme des polynômes de degré nul, à l'exception du nombre zéro, dont le degré n'est pas défini. Dans l'espace des polynômes ce nombre joue le rôle de l'élément nul. Les opérations sur les polynômes se ramènent aux opérations analogues sur leurs coefficients.

Le polynôme (1.0.2) peut être envisagé également comme une fonction de variable t réelle ou complexe. Toutefois, la définition de l'égalité de deux

fonctions se distingue de la définition « algébrique » de l'égalité des polynômes adoptée dans ce qui précède; plus précisément, les fonctions sont considérées comme égales si leurs valeurs sont égales quelles que soient les valeurs de la variable. Il est évident que deux polynômes égaux au sens de la définition « algébrique » le seront également en tant que fonctions de t. Pourtant, la réciproque ne s'établit qu'à la fin du chapitre 4. C'est pourquoi dans les premiers quatre chapitres l'expression $f(c)$ doit être interprétée comme une notation abrégée du nombre $a_0+a_1c+a_2c^2+\ldots$ $\ldots+a_kc^k$; l'égalité $f(c)=d$, comme une notation abrégée de la condition imposée aux coefficients des polynômes considérés; $f(-t)$, comme une notation abrégée du polynôme $a_0-a_1t+a_2t^2+\ldots+(-1)^ka_kt^k$; l'égalité $f(t)=f(-t)$, comme une notation abrégée des conditions $a_1=0$, $a_3=0$, ..., etc.

Voici les problèmes de calcul posés dans un espace arithmétique, typiques du présent chapitre :

1. Déterminer si le système de vecteurs donné est linéairement dépendant ou indépendant.

2. Trouver le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants du système donné, qui s'appelle rang du système.

3. Etablir si le vecteur x s'exprime par le système de vecteurs $y_1, \ldots, y_k$ et, dans l'affirmative, calculer les coefficients de la décomposition :

$$x=\alpha_1y_1+\ldots+\alpha_ky_k.$$

Pour résoudre les problèmes 1 et 2 on applique la *méthode des transformations élémentaires* (cf. 1.2.17, 1.2.18). Elle consiste en principe à ramener le système donné sans changer le rang à un système de vecteurs dont l'indépendance linéaire ou le rang sont évidents.

Le problème 3 se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la *méthode de Gauss* ou *méthode d'élimination successive des inconnues*. A cet effet, sans changer l'ensemble des solutions du système, on réduit ce dernier à la forme la plus simple. Compte tenu des applications multiples de la méthode de Gauss dans les chapitres qui suivent nous en donnons une description détaillée.

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{l} a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\ldots+a_{1n}^{(0)}x_n=b_1^{(0)}, \\ a_{21}^{(0)}x_1+a_{22}^{(0)}x_2+a_{23}^{(0)}x_3+\ldots+a_{2n}^{(0)}x_n=b_2^{(0)}, \\ a_{31}^{(0)}x_1+a_{32}^{(0)}x_2+a_{33}^{(0)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(0)}x_n=b_3^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}^{(0)}x_1+a_{m2}^{(0)}x_2+a_{m3}^{(0)}x_3+\ldots+a_{mn}^{(0)}x_n=b_m^{(0)}. \end{array} \qquad (1.0.3)$$

Supposons que $a_{11}^{(0)}\neq 0$. On peut toujours l'obtenir si parmi les $a_{ij}^{(0)}$ il y a des coefficients différents de zéro, en permutant au besoin les équations du système et (ou) en changeant la numérotation des inconnues. Retranchons maintenant des deux membres de la deuxième équation les membres respectifs de la première, multipliés d'abord par $a_{21}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, puis des deux membres

de la troisième équation, les membres respectifs de la première, multipliés par $a_{31}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, etc. Nous aboutirons à un système de la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n&=b_1^{(1)},\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)},\\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(1)}x_n&=b_3^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m2}^{(1)}x_2+a_{m3}^{(1)}x_3+\ldots+a_{mn}^{(1)}x_n&=b_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Ici $a_{1j}^{(1)}=a_{1j}^{(0)}$, $j=1, \ldots, n$; $b_1^{(1)}=b_1^{(0)}$; les autres éléments changent d'après les formules

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}a_{1j}^{(0)}, \qquad b_i^{(1)}=b_i^{(0)}-\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}b_1^{(0)}, \tag{1.0.4}$$

$i, j\geq 2$. Le premier pas de la méthode de Gauss est achevé. Le coefficient $a_{11}^{(0)}$ s'appelle *pivot du premier pas.*

Supposons maintenant que parmi les $a_{ij}^{(1)}$, $i, j\geq 2$, il y ait des coefficients différents de zéro et, en particulier, $a_{22}^{(1)}\neq 0$. Retranchons des deux membres de la troisième équation et de celles qui suivent les deux membres de la deuxième équation multipliée par les nombres respectifs

$$\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ \ldots,\ \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

On obtient alors le système

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)}x_1+a_{12}^{(2)}x_2+a_{13}^{(2)}x_3+\ldots+a_{1n}^{(2)}x_n&=b_1^{(2)},\\ a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\ldots+a_{2n}^{(2)}x_n&=b_2^{(2)},\\ a_{33}^{(2)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(2)}x_n&=b_3^{(2)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m3}^{(2)}x_3+\ldots+a_{mn}^{(2)}x_n&=b_m^{(2)}; \end{aligned}$$

$a_{22}^{(1)}$ s'appelle *pivot du deuxième pas.*

En poursuivant ainsi on réduit finalement notre système à la forme

$$\begin{aligned} a_{11}^{(r-1)}x_1+a_{12}^{(r-1)}x_2+\ldots+a_{1,r-1}^{(r-1)}x_{r-1}+a_{1r}^{(r-1)}x_r+\ldots+a_{1n}^{(r-1)}x_n&=b_1^{(r-1)},\\ a_{22}^{(r-1)}x_2+\ldots+a_{2,r-1}^{(r-1)}x_{r-1}+a_{2r}^{(r-1)}x_r+\ldots+a_{2n}^{(r-1)}x_n&=b_2^{(r-1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{r-1,r-1}^{(r-1)}x_{r-1}+a_{r-1,r}^{(r-1)}x_r+\ldots+a_{r-1,n}^{(r-1)}x_n&=b_{r-1}^{(r-1)},\\ a_{rr}^{(r-1)}x_r+\ldots+a_{rn}^{(r-1)}x_n&=b_r^{(r-1)},\\ 0\cdot x_r+\ldots+0\cdot x_n&=b_{r+1}^{(r-1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ 0\cdot x_r+\ldots+0\cdot x_n&=b_m^{(r-1)}. \end{aligned} \tag{1.0.5}$$

Ici $a_{11}^{(r-1)}\neq 0$, $a_{22}^{(r-1)}\neq 0$, $\ldots$, $a_{r-1,r-1}^{(r-1)}\neq 0$, $a_{rr}^{(r-1)}\neq 0$.

Si parmi les $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ il y a des nombres non nuls, il est évident que le système (1.0.5) ne possède pas de solutions ou qu'il est *incompatible.* Le système équivalent (1.0.3) est donc incompatible lui aussi. Il est possible

aussi que l'incompatibilité d'un système se manifeste avant, si après l'élimination successive on obtient l'équation

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b, \quad b\neq 0,$$

ou si cette dernière est contenue dans le système initial. Il va de soi qu'une telle équation achève le processus.

Si $b_{r+1}^{(r-1)}=\ldots=b_m^{(r-1)}=0$, le système (1.0.5) est *compatible*, et pour trouver ses solutions il suffit de traiter les r premières équations. Dans le cas $r=n$, ces n équations forment un système *triangulaire*

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1+a_{12}^{(n-1)}x_2+\ldots+a_{1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{1n}^{(n-1)}x_n&=b_1^{(n-1)},\\ a_{22}^{(n-1)}x_2+\ldots+a_{2,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{2n}^{(n-1)}x_n&=b_2^{(n-1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n&=b_{n-1}^{(n-1)},\\ a_{nn}^{(n-1)}x_n&=b_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Un tel système possède une solution unique : la dernière équation donne une valeur bien définie de x_n; en la portant dans l'avant-dernière équation on obtient la valeur bien définie de x_{n-1}, etc. Un système d'équations linéaires possédant une solution unique est dit *déterminé*. Ainsi, si le système (1.0.3) se prête à la réduction à une forme triangulaire, il est alors déterminé. Ce cas a toujours lieu si le vecteur se décompose suivant une base de l'espace.

Pour $r<n$, les r premières équations de (1.0.5) constituent un système *de forme trapézoïdale* à nombre infini de solutions. En donnant aux *inconnues non principales* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ des valeurs numériques arbitraires, nous trouvons par la méthode de Gauss des valeurs bien déterminées des inconnues $x_1, \ldots, x_r$. Cette méthode fournit toutes les solutions du système (1.0.5) et, par suite, du système (1.0.3). Un système d'équations linéaires à nombre infini de solutions est dit *indéterminé*. Ainsi, la forme trapézoïdale d'un système fini de la méthode de Gauss témoigne du caractère indéterminé du système initial (1.0.3). Il en sera ainsi, par exemple, si on cherche la décomposition du vecteur x par rapport au système linéairement dépendant $y_1, \ldots, y_k$ sous la condition que x appartienne à $L(y_1, \ldots, y_k)$.

Notons à titre de conclusion que toutes les transformations de la méthode de Gauss peuvent porter sur les éléments d'une *matrice complète* des coefficients du système (1.0.3) :

$$\bar{A}_0=\left\|\begin{matrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)}\\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \ldots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \ldots & a_{mn}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{matrix}\right\|.$$

Pour passer aux matrices successives $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$, on applique les formules (1.0.4). La méthode des transformations élémentaires que nous recommandons d'utiliser pour résoudre les problèmes 1 et 2 est au fond une application de la méthode de Gauss à une matrice composée de vecteurs du système donné.

§ 1.1. Détermination de l'espace vectoriel

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples d'espaces vectoriels, ainsi que des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels. Nous traitons également (problèmes 1.1.17, 1.1.18) des axiomes de l'espace vectoriel.

1.1.1. L'ensemble V_0 se compose d'un seul élément θ. Les opérations dans V_0 sont définies de la façon suivante :

a) $\theta+\theta=\theta$;

b) $\lambda\theta=\theta$ pour tout nombre λ du corps P. Vérifier que V_0 est un espace vectoriel sur P.

Pour chacun des ensembles suivants des vecteurs d'un plan établir si cet ensemble est un espace vectoriel par rapport aux opérations usuelles d'addition des vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre. Si la réponse est négative, montrer quelles propriétés d'un espace vectoriel ne sont pas remplies. On suppose que l'origine de chaque vecteur est un point fixé O du plan, ce point étant également l'origine d'un système cartésien.

1.1.2. Ensemble des vecteurs dont les extrémités appartiennent à la droite donnée.

1.1.3. Ensemble des vecteurs dont les extrémités se situent a) dans le premier quadrant d'un système cartésien; b) dans le premier ou le troisième quadrant; c) dans le premier ou le deuxième quadrant.

1.1.4. Ensemble des vecteurs qui forment avec le vecteur non nul donné a un angle φ, $0\leq\varphi\leq\pi$.

1.1.5. Montrer que a) l'ensemble des nombres réels peut être considéré comme un espace vectoriel rationnel; b) l'ensemble des nombres complexes peut être considéré comme un espace vectoriel réel; c) en général, tout corps P peut être considéré comme un espace vectoriel sur le corps P_1, sous-corps de P.

1.1.6. Dans l'ensemble R^+ des nombres réels positifs on définit les opérations suivantes :

a) « addition » $x\oplus y=xy$ (c'est-à-dire la multiplication usuelle des nombres x et y);

b) « multiplication par un nombre réel » $\alpha\circ x=x^\alpha$ (c'est-à-dire élévation du nombre x à la puissance α).

Vérifier si l'ensemble R^+ muni d'opérations indiquées est un espace vectoriel.

1.1.7. Soit $\tilde{R}_2$ l'ensemble des couples ordonnés de nombres réels $x=(\alpha_1, \alpha_2)$ muni d'opérations :

a) si $x=(\alpha_1, \alpha_2)$ et $y=(\beta_1, \beta_2)$, alors $x+y=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$;

b) si pour tout nombre réel λ, $\lambda x=(\lambda\alpha_1, \alpha_2)$, $\tilde{R}_2$ sera-t-il un espace vectoriel réel?

1.1.8. Changer dans le problème précédent la définition de la multiplication par un nombre : si $x=(\alpha_1, \alpha_2)$, alors $\lambda x=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$. Même question.

1.1.9. Soit P_k l'ensemble des collections ordonnées de k éléments du corps P : $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Les opérations dans P_k sont définies par les règles :

a) si $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ et $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, alors $x+y=(\alpha_1+ +\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_k+\beta_k)$;

b) pour tout λ du corps P

$$\lambda x=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_k).$$

Démontrer que P_k est un espace vectoriel sur le corps P.

1.1.10. Soit $Z^{(2)}$ le corps de deux éléments 0 et 1, où les opérations sont données par les tableaux suivants :

a) addition

	0	1
0	0	1
1	1	0

b) multiplication

	0	1
0	0	0
1	0	1

Construire l'espace vectoriel $Z_k^{(2)}$ (cf. problème 1.1.9). Montrer que, pour tout vecteur x de $Z_k^{(2)}$, $x+x=0$. Calculer le nombre de vecteurs dans $Z_k^{(2)}$.

1.1.11. Soit s l'ensemble des suites infinies de nombres réels $x= =(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$. s est muni d'opérations

a) si $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$, $x+y=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots)$;

b) pour tout λ réel,

$$\lambda x=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots).$$

s sera-t-il un espace vectoriel réel?

1.1.12. Soit F l'ensemble des suites infinies de nombres réels dont les éléments satisfont à la relation $\alpha_k=\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}$, $k=3, 4, \ldots$. Les opérations sur les suites sont définies de même que dans le problème 1.1.11. F est-il un espace vectoriel?

Vérifier dans ce qui suit si chacun des ensembles des polynômes à une variable à coefficients réels est un espace vectoriel par rapport aux opérations ordinaires d'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un nombre.

1.1.13. L'ensemble des polynômes de tous les degrés complété par zéro.

1.1.14. L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ complété par zéro.

1.1.15. L'ensemble des polynômes de degré n donné.

1.1.16. L'ensemble des polynômes $f(t)$ satisfaisant aux conditions

a) $f(0)=1$;

b) $f(0)=0$;

c) $2f(0)-3f(1)=0$;

d) $f(1)+f(2)+\ldots+f(k)=0$.

1.1.17*. Donner un exemple d'un ensemble M tel qu'il vérifie tous les axiomes de l'espace vectoriel sauf $1\cdot x=x$ pour tout x de M. Quel est l'intérêt de cet axiome dans la définition de l'espace vectoriel?

1.1.18*. Montrer que la commutativité de l'addition se déduit des autres axiomes de l'espace vectoriel.

§ 1.2. Dépendance linéaire

Présentation des problèmes du paragraphe. Outre les problèmes relatifs à la notion de la dépendance linéaire, nous donnons ci-dessus un outil de calcul permettant de dire si un système concret de vecteurs d'un espace arithmétique est linéairement dépendant ou indépendant. Ces procédés consistent à réaliser des transformations élémentaires du système.

1.2.1. Prouver qu'un système de vecteurs contenant un vecteur nul est linéairement dépendant.

1.2.2. Démontrer qu'un système de vecteurs dont deux vecteurs diffèrent par un facteur scalaire est linéairement dépendant.

1.2.3. Montrer que si un système de vecteurs possède un sous-système linéairement dépendant, le système tout entier est aussi linéairement dépendant.

1.2.4. Démontrer que dans un système de vecteurs linéairement indépendant tout sous-système est également linéairement indépendant.

1.2.5. Soient le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ linéairement indépendant et le système $x_1, \ldots, x_m, y$ linéairement dépendant. Prouver que le vecteur y s'exprime linéairement par les vecteurs $x_1, \ldots, x_m$.

1.2.6. Montrer que dans le problème précédent la décomposition du vecteur y suivant le système $x_1, \ldots, x_m$ est unique.

1.2.7. Supposons maintenant que la décomposition du vecteur y suivant un certain système $x_1, \ldots, x_m$ soit unique. Démontrer que le système $x_1, \ldots, x_m$ est linéairement indépendant.

1.2.8. Soit le vecteur y exprimé linéairement par le système $x_1, \ldots, x_m$ linéairement dépendant. Montrer que dans ce système y possède un nombre infini de décompositions distinctes.

1.2.9. Soit x, y, z un système de vecteurs linéairement indépendant. Les systèmes de vecteurs

$$\text{a) } x,\ x+y,\ x+y+z; \quad \text{b) } x+y,\ y+z,\ z+x;$$
$$\text{c) } x-y,\ y-z,\ z-x$$

sont-ils linéairement indépendants?

1.2.10. Montrer que quels que soient les vecteurs x, y, z et les nombres α, β, γ, le système de vecteurs $\alpha x-\beta y,\ \gamma y-\alpha z,\ \beta z-\gamma x$ est linéairement dépendant.

1.2.11. Soient r, s, v des nombres réels distincts. Le système de polynômes

$$(t-r)(t-s), \quad (t-r)(t-v), \quad (t-s)(t-v)$$

est-il linéairement dépendant?

1.2.12. Trouver la combinaison linéaire $3x_1-2x_2+7x_3$ des vecteurs de l'espace arithmétique R_4

$$x_1=(3, 1, -7, 4),$$
$$x_2=(1, 5, 0, 6),$$
$$x_3=(-1, 1, 3, 0).$$

Discuter le résultat obtenu. Que peut-on dire du système de vecteurs x_1, x_2, x_3?

1.2.13. On donne le système de polynômes $f_1(t)=1-t^2$; $f_2(t)=1+t^3$; $f_3(t)=t-t^3$; $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Trouver les combinaisons linéaires

a) $5f_1+f_2-4f_3$;

b) $f_1+9f_2-4f_4$

des polynômes de ce système. Discuter les résultats obtenus. Que peut-on dire du système de polynômes donné?

1.2.14. Trouver d'autres décompositions du polynôme obtenu dans le problème 1.2.13 par rapport au système $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$.

1.2.15. Démontrer l'indépendance linéaire du système de vecteurs de forme « trapézoïdale » de l'espace P_k (cf. problème 1.1.9) :

$$\begin{aligned} y_1&=(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p}, \alpha_{1,p+1}, \ldots, \alpha_{1q}, \alpha_{1,q+1}, \ldots, \alpha_{1t}, \alpha_{1,t+1}, \ldots, \alpha_{1k}),\\ y_2&=(0, \ldots, 0, \alpha_{2,p+1}, \ldots, \alpha_{2q}, \alpha_{2,q+1}, \ldots, \alpha_{2t}, \alpha_{2,t+1}, \ldots, \alpha_{2k}),\\ y_3&=(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, \alpha_{3,q+1}, \ldots, \alpha_{3t}, \alpha_{3,t+1}, \ldots, \alpha_{3k}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_r&=(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, \alpha_{r,t+1}, \ldots, \alpha_{rk}). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Ici $\alpha_{2,p+1}, \alpha_{3,q+1}, \ldots, \alpha_{r,t+1}$ sont les éléments du corps P différents de zéro. Au moins un des éléments $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p}$ est également non nul.

1.2.16. Prouver que dans un espace des polynômes tout système fini de polynômes de différents degrés ne contenant pas de zéro est linéairement indépendant.

1.2.17. Montrer que la dépendance (resp. l'indépendance) linéaire d'un système de vecteurs n'est pas violée par les *transformations* dites *élémentaires* du système : a) permutation de deux vecteurs du système; b) multiplication d'un vecteur par un nombre non nul; c) addition à l'un de ses vecteurs d'un autre vecteur multiplié par un nombre arbitraire.

1.2.18. Démontrer qu'un système de vecteurs arbitraire d'un espace arithmétique peut être réduit par des transformations élémentaires à un système de vecteurs du type donné dans le problème 1.2.15, complété peut-être par quelques vecteurs nuls. Comment faut-il procéder pour déterminer si le système initial est linéairement dépendant?

Etablir dans ce qui suit si les systèmes de vecteurs des espaces arithmétiques sont linéairement dépendants :

1.2.19. $x_1=(-3, 1, 5)$, $x_2=(6, -2, 15)$.

1.2.20. $x_1=(4, -12, 28)$, $x_2=(-7, 21, -49)$.

1.2.21. $x_1=(1, 2, 3, 0)$,
$x_2=(2, 4, 6, 1)$.

1.2.22. $x_1=(1, i, 2-i, 3+i)$,
$x_2=(1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

1.2.23. $x_1=(1, 2, 3)$,
$x_2=(2, 5, 7)$,
$x_3=(3, 7, 10)$.

1.2.24. $x_1=(1, 2, 3)$,
$x_2=(2, 5, 7)$,
$x_3=(3, 7, 11)$.

1.2.25. $x_1=(1, 2, 3)$,
$x_2=(2, 5, 7)$,
$x_3=(3, 7, 10+\varepsilon)$.

Ici ε est un nombre aussi petit que l'on veut différent de zéro.

1.2.26. $x_1=(1, 1, 1, 1)$,
$x_2=(1, -1, -1, 1)$,
$x_3=(1, -1, 1, -1)$,
$x_4=(1, 1, -1, -1)$.

1.2.27. $x_1=(5, -3, 2, 1, 10)$,
$x_2=(-1, 8, 1, -4, 7)$,
$x_3=(2, 1, 9, -3, 6)$,
$x_4=(1, 3, -5, 9, 11)$.

1.2.28*. Soit le système de vecteurs d'un espace arithmétique

$$\begin{aligned} x_1&=(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ x_2&=(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s&=(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}), \end{aligned}$$

où $s\leq n$. Démontrer que si $|\alpha_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{s} |\alpha_{ij}|$, $j=1, \ldots, s$, le système de vecteurs donné est linéairement indépendant.

§ 1.3. Enveloppes linéaires. Rang d'un système de vecteurs

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce qui suit nous donnons des problèmes associés à la détermination de l'enveloppe linéaire, de l'équivalence des systèmes, de la base et du rang du système de vecteurs donné, ainsi que quelques problèmes sur le calcul du rang et la construction de la base d'un système de vecteurs d'un espace arithmétique. La solution de ces derniers problèmes est recherchée là aussi à l'aide de la méthode des transformations élémentaires décrite dans le paragraphe précédent.

Décrire les enveloppes linéaires des systèmes de vecteurs suivants de l'espace R_5 :

1.3.1. $x_1=(1, 0, 0, 0, 0)$,
$x_2=(0, 0, 1, 0, 0)$,
$x_3=(0, 0, 0, 0, 1)$.

1.3.2. $x_1=(1, 0, 0, 0, 1)$,
$x_2=(0, 1, 0, 1, 0)$,
$x_3=(0, 0, 1, 0, 0)$.

1.3.3. $x_1=(1, 0, 0, 0, -1)$,
$x_2=(0, 1, 0, 0, -1)$,
$x_3=(0, 0, 1, 0, -1)$,
$x_4=(0, 0, 0, 1, -1)$.

Trouver les enveloppes linéaires des systèmes de polynômes suivants :

1.3.4. $1, t, t^2$.

1.3.5. $1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2$.

1.3.6. $1-t^2, t-t^2, 2-t-t^2$.

1.3.7. $1-t^2, t-t^2$.

1.3.8*. Examiner l'enveloppe linéaire des nombres 1, $\sqrt{3}$ dans l'ensemble des nombres réels envisagé comme un espace vectoriel rationnel. Le nombre $\sqrt[4]{3}$ appartient-il à cette enveloppe?

1.3.9. Si chaque vecteur du système $y_1, \ldots, y_n$ est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_m$, on dit que le *système* $y_1, \ldots, y_n$ *s'exprime linéairement par le système* $x_1, \ldots, x_m$. Démontrer la transitivité de la notion suivante : si le système $y_1, \ldots, y_n$ s'exprime linéairement par le système $x_1, \ldots, x_m$ et le système $z_1, \ldots, z_p$ s' exprime linéairement par $y_1, \ldots, y_n$, le système $z_1, \ldots, z_p$ s'exprime linéairement par $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.10. Montrer que si le système $y_1, \ldots, y_n$ s'exprime linéairement par le système $x_1, \ldots, x_m$, l'enveloppe linéaire du premier système est emboîtée dans l'enveloppe linéaire du second système.

1.3.11. Le système de vecteurs z_1, z_2 s'exprime linéairement par le système y_1, y_2, y_3, y_4 :

$$z_1 = 2y_1 + y_2 + 3y_4,$$
$$z_2 = y_1 - 5y_2 + 4y_3 - 2y_4.$$

A son tour, le système y_1, y_2, y_3, y_4 s'exprime linéairement par le système x_1, x_2, x_3 :

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$y_2 = x_1 + x_2 - x_3,$$
$$y_3 = x_1 - x_2 + x_3,$$
$$y_4 = -x_1 + x_2 + x_3.$$

Trouver l'expression des vecteurs z_1, z_2 par les vecteurs x_1, x_2, x_3.

1.3.12. Nous dirons *équivalents* pour deux systèmes de vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_n$, si chacun de ces systèmes s'exprime linéairement par l'autre. Démontrer que la relation d'équivalence des systèmes de vecteurs est réflexive, symétrique et transitive.

1.3.13. Montrer que deux systèmes de vecteurs sont équivalents si et seulement si leurs enveloppes linéaires coïncident.

Les systèmes de vecteurs

1.3.14. $x_1 = (1, 0, 0),\quad y_1 = (0, 0, 1),$
$x_2 = (0, 1, 0),\quad y_2 = (0, 1, 1),$
$x_3 = (0, 0, 1);\quad y_3 = (1, 1, 1).$

1.3.15. $x_1 = (1, 0, 0),\quad y_1 = (1, 0, 0),$
$x_2 = (0, 1, 0),\quad y_2 = (0, 1, 1),$
$x_3 = (0, 0, 1);\quad y_3 = (1, 1, 1)$

sont-ils équivalents?

1.3.16*. Démontrer que deux systèmes équivalents linéairement indépendants contiennent le même nombre de vecteurs.

1.3.17. Dans le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ les vecteurs $y_1, \ldots, y_n$ s'expriment par les vecteurs $x_1, \ldots, x_m$. Montrer que le système $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ est équivalent au système $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.18*. Montrer que dans chaque système de vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ contenant au moins un vecteur non nul on peut choisir un sous-système linéairement indépendant qui lui serait équivalent. (Tout système de ce type s'appelle *base* du système de vecteurs donné.)

1.3.19. Montrer que toutes les bases du système donné $x_1, \ldots, x_m$ se composent d'un même nombre de vecteurs. (Ce nombre s'appelle *rang* du système donné. Si tous les vecteurs du système sont nuls, son rang est nul par définition.)

1.3.20. Soit r le rang du système $x_1, \ldots, x_m$. Démontrer que a) l'un quelconque de ses sous-systèmes contenant plus de r vecteurs est linéairement dépendant; b) l'un quelconque de ses sous-systèmes indépendants contenant r vecteurs est une base du système donné. Noter que le problème a) entraîne que le rang d'un système de vecteurs est égal au nombre maximal de ses vecteurs linéairement indépendants.

1.3.21. Prouver que a) tout vecteur non nul du système de vecteurs donné peut être inclus dans une base de ce système; b) tout sous-système linéairement indépendant du système donné peut être complété jusqu'à la base de ce système.

1.3.22. Démontrer que si le système $y_1, \ldots, y_n$ s'exprime linéairement par le système $x_1, \ldots, x_m$, le rang du premier système n'est pas supérieur au rang du second système.

1.3.23. Démontrer que si le système $y_1, \ldots, y_n$ s'exprime linéairement par le système $x_1, \ldots, x_m$, le rang du système $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ est égal au rang du système $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.24. Démontrer que les systèmes équivalents de vecteurs sont de même rang. La réciproque : deux systèmes quelconques de même rang sont équivalents, est-elle vraie?

1.3.25*. Prouver que si l'un des deux systèmes de vecteurs de même rang s'exprime linéairement par l'autre, ces systèmes sont équivalents.

1.3.26. Démontrer que les transformations élémentaires d'un système de vecteurs ne changent pas son rang.

1.3.27. Appliquer la méthode de la « réduction à la forme trapézoïdale » de 1.2.18 pour résoudre le problème suivant : déterminer le rang du système de vecteurs donné d'un espace arithmétique.

Trouver le rang des systèmes de vecteurs suivants :

1.3.28. $x_1=(1, 2, 3)$, $x_2=(4, 5, 6)$, $x_3=(7, 8, 9)$, $x_4=(10, 11, 12)$.

1.3.29. $x_1=(1, 4, 7, 10)$, $x_2=(2, 5, 8, 11)$, $x_3=(3, 6, 9, 12)$.

1.3.30. $x_1=(1, -1, 0, 0)$,
$x_2=(0, 1, -1, 0)$
$x_3=(0, 0, 1, -1)$
$x_4=(0, 0, 0, 1)$,
$x_5=(7, -3, -4, 5)$.

1.3.31. $x_1=(1, -1, 0, 0)$,
$x_2=(0, 1, -1, 0)$,
$x_3=(0, 0, 1, -1)$,
$x_4=(-1, 0, 0, 1)$.

1.3.32. $x_1=(1, 10, 0, 0)$,
$x_2=(0, 1, 10, 0)$,
$x_3=(0, 0, 1, 10)$,
$x_4=(10^{-3}, 0, 0, 1)$.

1.3.33. $x_1=(1, 1, 1, 1, 1)$,
$x_2=(1, i, -1, -i, 1)$,
$x_3=(1, -1, 1, -1, 1)$,
$x_4=(1, -i, -1, i, 1)$.

1.3.34*. Appliquer la méthode du problème 1.3.27 à la recherche de l'une quelconque des bases du système de vecteurs donné d'un espace arithmétique.

Trouver l'une quelconque des bases de chacun des systèmes de vecteurs suivants :

1.3.35. $x_1=(-1, 4, -3, -2)$,
$x_2=(3, -7, 5, 3)$,
$x_3=(3, -2, 1, 0)$,
$x_4=(-4, 1, 0, 1)$.

1.3.36. $x_1=(0, 2, -1)$,
$x_2=(3, 7, 1)$,
$x_3=(2, 0, 3)$,
$x_4=(5, 1, 8)$.

1.3.37*. $x_1=(14, -27, -49, 113)$,
$x_2=(43, -82, -145, 340)$,
$x_3=(-29, 55, 96, -227)$,
$x_4=(85, -163, -293, 677)$.

1.3.38. $x_1=(3-i, 1-2i, -7+5i, 4+3i)$,
$x_2=(1+3i, 1+i, -6-7i, 4i)$,
$x_3=(0, 1, 1, -3)$

1.3.39*. Dans le système $x_1, \ldots, x_m$ les vecteurs $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ engendrent une base où n'entre pas le vecteur non nul x_j. Prouver que parmi les vecteurs de base il existe un vecteur x_{i_t} tel qu'en le remplaçant dans le sous-système $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ par le vecteur x_j on obtient une nouvelle base du système $x_1, \ldots, x_m$. Un tel vecteur x_{i_t} sera-t-il unique?

1.3.40*. Que peut-on dire d'un système de vecteurs de rang r s'il possède a) une base unique; b) deux bases exactement; c) trois bases exactement? On dit que deux bases sont égales si elles ne diffèrent que par l'ordre des vecteurs.

Trouver toutes les bases des vecteurs suivants :

1.3.41. $x_1=(4, -2, 12, 8)$,
$x_2=(-6, 12, 9, 13)$,
$x_3=(-10, 5, -30, -20)$,
$x_4=(-14, 28, 21, -7)$.

1.3.42. $x_1=(1, 2, 3, 0, -1)$,
$x_2=(0, 1, 1, 1, 0)$,
$x_3=(1, 3, 4, 1, -1)$.

1.3.43. $x_1=(1+i, 1-i, 2+3i)$,
$x_2=(i, 1, 2)$,
$x_3=(1-i, -1-i, 3-2i)$,
$x_4=(4, -4i, 10+2i)$.

1.3.44*. Appliquer la méthode du problème 1.3.27 pour résoudre le problème suivant : pour des systèmes de vecteurs donnés $y_1, \ldots, y_n$ et $x_1, \ldots, x_m$ d'un espace arithmétique établir si le premier système s'exprime par le second.

1.3.45. On donne deux systèmes de vecteurs :

$$\begin{array}{ll} x_1=(1,\ 1,\ \ 1), & y_1=(1,\ 2,\ 3), \\ x_2=(1,\ 0,\ -1), & y_2=(0,\ 1,\ 2), \\ x_3=(1,\ 3,\ \ 5); & y_3=(3,\ 4,\ 5), \\ & y_4=(4,\ 6,\ 8). \end{array}$$

Le système y_1, y_2, y_3, y_4 s'exprime-t-il linéairement par le système x_1, x_2, x_3?

1.3.46. Les systèmes de vecteurs du problème précédent sont-ils équivalents?

§ 1.4. Base et dimension de l'espace

Présentation des problèmes du paragraphe. Il commence par des exemples d'espaces vectoriels de dimensions finie et infinie pour ne considérer ensuite jusqu'à la fin de l'ouvrage que des espaces de dimensions finies. Puis vient la discussion sur la notion de base. Si dans un espace vectoriel on fixe une base, les problèmes relatifs aux éléments de cet espace se réduisent à l'aide de coordonnées aux problèmes analogues concernant les vecteurs d'un espace arithmétique. Certains de ces problèmes (recherche du rang d'un système de vecteurs, de la dimension et de la base d'une enveloppe linéaire, etc.) se résolvent par la méthode des transformations élémentaires; d'autres (par exemple, la décomposition suivant la base) se ramènent à la résolution (comme on le sait à l'avance) de certains systèmes d'équations linéaires qu'il est le plus avantageux de calculer par la méthode de Gauss. Le paragraphe se termine par des problèmes consacrés aux sous-espaces vectoriels.

Pour chacun des espaces vectoriels ci-dessous déterminer si c'est un espace à dimension finie. Dans l'affirmative, trouver la dimension et construire l'une quelconque des bases de l'espace.

1.4.1. Espace R (cf. problème 1.1.5).

1.4.2. Espace P_k dont les vecteurs sont des collections ordonnées de k éléments du corps P (cf. problème 1.1.9).

1.4.3. Espace s de toutes les suites réelles infinies (cf. problème 1.1.11).

1.4.4. Espace F des suites réelles infinies dont les éléments vérifient la relation $\alpha_k=\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}$, $k=3, 4, \ldots$ (cf. problème 1.1.12).

1.4.5. Espace M des polynômes de tous les degrés (cf. problème 1.1.13).

1.4.6. Espace M_n des polynômes de degrés ne dépassant pas le nombre non négatif donné n (cf. problème 1.1.14).

1.4.7. Déterminer la dimension du corps des nombres complexes considéré comme a) un espace vectoriel complexe; b) un espace vectoriel réel.

1.4.8. Soit C_n l'ensemble des collections ordonnées de n nombres complexes à définition usuelle des opérations sur ces collections (cf. problème 1.1.9). Trouver la dimension de C_n a) comme d'un espace complexe; b) comme d'un espace réel.

Montrer que les systèmes de vecteurs suivants sont les bases de l'espace R_n :

1.4.9. $x_1=(1, 2, 3, \ldots, n)$,
$x_2=(0, 2, 3, \ldots, n)$,
$x_3=(0, 0, 3, \ldots, n)$,
. . . .
$x_n=(0, 0, 0, \ldots, n)$.

1.4.10. $x_1=(1, 1, \ldots, 1, 1, 1)$,
$x_2=(1, 1, \ldots, 1, 1, 0)$,
$x_3=(1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$,
. . . .
$x_n=(1, 0, \ldots, 0, 0, 0)$.

1.4.11. $x_1=(1, 1, 1, 1, \ldots, 1)$,
$x_2=(0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$,
$x_3=(0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$,
$x_4=(0, 1, 1, 1, \ldots, 0)$,
. . . .
$x_n=(0, 1, 1, 1, \ldots, 1)$,

1.4.12. Démontrer que dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ une base est constituée par tout système de polynômes non nuls contenant un polynôme de chaque degré de k, $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

1.4.13. Etablir lequel des deux systèmes de vecteurs suivants est une base de l'espace R_4 :

a) $x_1=(1, 2, -1, -2)$,
$x_2=(2, 3, 0, -1)$,
$x_3=(1, 2, 1, 3)$,
$x_4=(1, 3, -1, 0)$;

b) $x_1=(1, 2, -1, -2)$,
$x_2=(2, 3, 0, -1)$,
$x_3=(1, 2, 1, 4)$,
$x_4=(1, 3, -1, 0)$.

Dans ce qui suit nous ne traitons que des espaces de dimension finie.

1.4.14. Démontrer que a) tout vecteur non nul d'un espace peut être inclus dans une base quelconque de cet espace; b) tout système de vecteurs linéairement indépendant peut être complété jusqu'à une base de l'espace.

1.4.15. Trouver dans l'espace R_4 deux bases distinctes aux vecteurs communs $e_1=(1, 1, 0, 0)$ et $e_2=(0, 0, 1, 1)$.

1.4.16. Compléter le système de polynômes t^5+t^4, t^5-3t^3, t^5+2t^2, t^5-t jusqu'à la base de l'espace M_5.

1.4.17. Démontrer que la décomposition d'un vecteur suivant toute base est unique.

1.4.18. Supposons que tout vecteur d'un espace V s'exprime linéairement par le système $e_1, \ldots, e_n$; en outre, pour un certain vecteur x, la décomposition suivant ce système est unique. Démontrer que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ engendrent une base de l'espace V.

1.4.19. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base arbitraire d'un espace V. Démontrer que

a) les coordonnées du vecteur $x+y$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$ sont égales aux sommes des coordonnées de même indice des vecteurs x et y dans cette même base;

b) les coordonnées du vecteur λx dans la base $e_1, \ldots, e_n$ sont égales aux coordonnées de même indice du vecteur x multipliées par le nombre λ.

1.4.20. Une certaine base $e_1, \ldots, e_n$ est fixée dans un espace V. A chaque vecteur x on fait correspondre la ligne de ses coordonnées dans cette base :

$$x \to x_e = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Démontrer que

a) la dépendance (resp. l'indépendance) linéaire d'un système de vecteurs $x, y, \ldots, z$ entraîne la dépendance (resp. l'indépendance) linéaire d'un système de lignes $x_e, y_e, \ldots, z_e$ considérées comme éléments de l'espace arithmétique correspondant;

b) le rang d'un système de vecteurs $x, y, \ldots, z$ est égal au rang du système de lignes $x_e, y_e, \ldots, z_e$;

c) si un vecteur u s'exprime linéairement par un système $x, y, \ldots, z$, c'est-à-dire si $u = \lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$, ceci est également vrai pour les lignes $u_e, x_e, y_e, \ldots, z_e$ et $u_e = \lambda x_e + \mu y_e + \ldots + \nu z_e$.

Trouver le rang et une base quelconque de chacun des systèmes de polynômes :

1.4.21. $3t^2+2t+1$, $4t^2+3t+2$, $3t^2+2t+3$, t^2+t+1, $4t^2+3t+4$.

1.4.22. t^3+2t^2+3t+4, $2t^3+3t^2+4t+5$, $3t^3+4t^2+5t+6$, $4t^3+5t^2+6t+$ $+7$.

Vérifier si les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ engendrent une base de l'espace R_n et trouver les coordonnées du vecteur x dans cette base :

1.4.23. $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (-1, 2, 2)$; $x = (1, 1, 1)$.

1.4.24. $e_1 = (1, 5, 3)$, $e_2 = (2, 7, 3)$, $e_3 = (3, 9, 4)$; $x = (2, 1, 1)$.

1.4.25. $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x = (7, 14, -1, 2)$.

1.4.26. $e_1 = (1, 2, 1, 1)$, $e_2 = (2, 3, 1, 0)$, $e_3 = (3, 1, 1, -2)$, $e_4 = (4, 2, -1, -6)$; $x = (0, 0, 2, 7)$.

1.4.27. Calculer les coordonnées du polynôme $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ dans chacune des bases suivantes de l'espace M_5 :

a) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;

b) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$;

c) $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3, t^4+t^3, t^5+t^3$.

1.4.28. Vérifier si les suites

$$e_1 = (2, 3, 5, 8, 13, \ldots),$$

$$e_2 = (1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$$

engendrent une base de l'espace F (cf. problème 1.1.12) et décomposer suivant cette base la suite

$$e = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots).$$

1.4.29. Montrer que l'enveloppe linéaire tendue sur un système de vecteurs fini arbitraire d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel de cet espace.

1.4.30. Soit V un espace vectoriel de dimension n. Démontrer que tout sous-espace vectoriel de V est de dimension finie ne dépassant pas n.

1.4.31. Démontrer que si L est un sous-espace vectoriel d'un espace V et la dimension de L est égale à celle de V, L se confond avec V.

1.4.32. Prouver que tout sous-espace d'un espace V de dimension n peut être considéré comme une enveloppe linéaire d'un certain système de vecteurs, le système à choisir pouvant être composé au plus de n vecteurs.

1.4.33. Démontrer que dans un espace V de dimension n on peut trouver un sous-espace vectoriel de n'importe quelle dimension k, $0 \leq k \leq n$.

1.4.34. Un sous-espace vectoriel L est tendu sur un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$. Démontrer que la dimension de L est égale au rang du système $x_1, \ldots, x_k$ et que comme base on peut choisir toute base de ce système.

Déterminer la dimension et trouver une base quelconque des sous-espaces vectoriels tendus sur les systèmes suivants de vecteurs d'un espace arithmétique :

1.4.35. $x_1=(1, 2, 2, -1)$, $x_2=(2, 3, 2, 5)$, $x_3=(-1, 4, 3, -1)$, $x_4=(2, 9, 3, 5)$.

1.4.36. $x_1=(-3, 1, 5, 3, 2)$, $x_2=(2, 3, 0, 1, 0)$, $x_3=(1, 2, 3, 2, 1)$, $x_4=(3, -5, -1, -3, -1)$, $x_5=(3, 0, 1, 0, 0)$.

1.4.37. Trouver une base quelconque et la dimension du sous-espace L de l'espace R_n si L est donné par l'équation

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0.$$

1.4.38. Dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels on examine les sous-ensembles des polynômes vérifiant les conditions a) $f(0)=0$; b) $f(1)=0$; c) $f(a)=0$ respectivement, où a est un nombre réel quelconque; d) $f(0)=f(1)=0$ respectivement. Vérifier si chacun des sous-ensembles envisagés est un sous-espace vectoriel de l'espace M_n et déterminer les dimensions de ces sous-espaces.

1.4.39. Trouver la dimension et une base quelconque de l'enveloppe linéaire tendue sur le système de polynômes suivant : t^6+t^4; t^6+3t^4-t; t^6-2t^4+t; t^6-4t^4+2t.

1.4.40. Soit L un sous-espace de dimension m d'un espace V de dimension n. Démontrer qu'on peut trouver une base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace V telle que les premiers m vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ appartiennent au sous-espace L.

1.4.41*. Démontrer que quel que soit le sous-espace L de dimension m d'un espace V de dimension n, où $m<n$, il existe une base de V qui a) ne contient aucun vecteur de L; b) contient k vecteurs de L exactement, $k<m$.

1.4.42. Composer une base de l'espace M_5 à partir de polynômes de degré cinq.

1.4.43. Inversement : peut-on trouver une base de l'espace M_5 qui ne contient aucun polynôme de degré cinq?

§ 1.5. Somme et intersection des sous-espaces

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le paragraphe qui suit nous nous sommes proposés les buts suivants :

Donner des procédés de calcul d'une base de la somme et de l'intersection de deux espaces vectoriels.

Indiquer les critères différents de la « droiture » d'une somme des sous-espaces.

Attirer l'attention sur le fait que dans le cas général la décomposition d'un vecteur suivant les sous-espaces n'est pas unique. Elle ne sera unique que dans le cas d'une somme directe. Les sous-espaces dont la somme directe vaut l'espace vectoriel tout entier y jouent le rôle d'une base généralisée.

Illustrer cette circonstance que pour tout sous-espace il existe un supplémentaire (et non un seul).

1.5.1. Démontrer que la somme et l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace V sont elles-mêmes des sous-espaces vectoriels de cet espace.

1.5.2. Examiner l'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace V donné muni de l'addition des sous-espaces. Vérifier si

a) l'addition est associative;

b) l'ensemble possède un élément nul.

Cet ensemble formera-t-il un groupe?

1.5.3. Examiner l'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace V donné muni de l'intersection des sous-espaces. Montrer que

a) l'intersection est associative;

b) l'ensemble possède un élément unité.

1.5.4. Démontrer que quels que soient les sous-espaces L_1 et L_2, ils vérifient la formule

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Ici et dans ce qui suit $\dim L$ désigne la dimension de l'espace vectoriel L.

1.5.5. Démontrer que pour tout p

$$\dim (L_1 + \ldots + L_p) \leq \dim L_1 + \ldots + \dim L_p.$$

1.5.6. Soient L_1 l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$; L_2 l'enveloppe linéaire des vecteurs $y_1, \ldots, y_l$. Démontrer que la somme $L_1 + L_2$ est constituée d'une base quelconque du système $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$. En particulier, la base de $L_1 + L_2$ peut s'obtenir en complétant la base de $L_1 (L_2)$.

Trouver une base quelconque et la dimension de la somme du sous-espace L_1 tendu sur les vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ et du sous-espace L_2 tendu sur les vecteurs $y_1, \ldots, y_l$. Déterminer également la dimension de leur intersection.

1.5.7. $x_1 = (0, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 0, 1, 1)$; $y_1 = (-1, 3, 2, -1)$, $y_2 = (1, 1, 0, -1)$.

1.5.8. $x_1 = (2, -5, 3, 4)$, $x_2 = (1, 2, 0, -7)$, $x_3 = (3, -6, 2, 5)$; $y_1 = (2, 0, -4, 6)$, $y_2 = (1, 1, 1, 1)$, $y_3 = (3, 3, 1, 5)$.

1.5.9*. Soient $x_1, \ldots, x_k$ une base du sous-espace L_1; $y_1, \ldots, y_l$ une base du sous-espace L_2. Soient, ensuite, $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s$ une base du

système $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ et les vecteurs $y_{s+1}, \ldots, y_l$ n'entrant pas dans cette base et dont la décomposition suivant cette base s'écrit

$$y_i = \alpha_{i1}x_1 + \ldots \alpha_{ik}x_k + \beta_{i1}y_1 + \ldots + \beta_{is}y_s, \quad i = s+1, \ldots, l.$$

Démontrer que le système de vecteurs $z_1, \ldots, z_{l-s}$, où

$$z_{i-s} = -\beta_{i1}y_1 - \ldots - \beta_{is}y_s + y_i, \quad i = s+1, \ldots, l,$$

ou, ce qui revient au même,

$$z_{i-s} = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{ik}x_k, \quad i = s+1, \ldots, l,$$

engendre la base de l'intersection $L_1 \cap L_2$.

Trouver la base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels tendus sur les systèmes $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_l$ respectivement :

1.5.10. $x_1 = (2, 1, 0)$, $x_2 = (1, 2, 3)$, $x_3 = (-5, -2, 1)$; $y_1 = (1, 1, 2)$, $y_2 = (-1, 3, 0)$, $y_3 = (2, 0, 3)$.

1.5.11. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$; $y_1 = (1, -1, -1, 1)$, $y_2 = (2, -2, 0, 0)$, $y_3 = (3, -1, 1, 1)$.

1.5.12. $x_1 = (1, 2, 1, 1)$, $x_2 = (2, 3, 1, 0)$, $x_3 = (3, 1, 1, -2)$; $y_1 = (0, 4, 1, 3)$, $y_2 = (1, 0, -2, -6)$, $y_3 = (1, 0, 3, 5)$.

1.5.13. Trouver pour le vecteur $x = (1, 0, 1)$ deux décompositions distinctes suivant les sous-espaces L_1 et L_2 du problème 1.5.10.

1.5.14. Démontrer que la somme L des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est somme directe si et seulement si la réunion des bases de ces sous-espaces donne la base L.

1.5.15. Prouver que l'énoncé du problème 1.5.14 est équivalent à la condition :

$$\dim (L_1 + \ldots + L_p) = \dim L_1 + \ldots + \dim L_p.$$

1.5.16. Démontrer que le sous-espace $L = L_1 + \ldots + L_p$ est somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ si et seulement si l'intersection de chacun des sous-espaces L_i, $1 \leq i \leq p$, avec la somme des autres sous-espaces n'est composée que du vecteur nul.

1.5.17. Soit le système ordonné des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$. Vérifier si la condition nécessaire et suffisante donnée dans le problème 1.5.16 peut être affaiblie : plus précisément, l'intersection de chacun des sous-espaces L_i, $2 \leq i \leq p$, avec la somme des sous-espaces précédents ne doit être composée que du vecteur nul.

1.5.18. Démontrer que la somme des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est somme directe si et seulement si tout système de vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_p$ pris un à un de chaque L_j, $j = 1, \ldots, p$ est linéairement indépendant.

1.5.19. Démontrer que la somme directe des sous-espaces est associative : si $L = L_1 + L_2$ et $L = L_2 + L_3$, on a $L = L_1 + L_2 + L_3$.

1.5.20. Vérifier que la somme directe des sous-espaces vectoriels L_1 et L_2 tendus sur les systèmes de vecteurs $x_1 = (2, 3, 11, 5)$, $x_2 = (1, 1, 5, 2)$; $x_3 = (0, 1, 1, 1)$ et $y_1 = (2, 1, 3, 2)$, $y_2 = (1, 1, 3, 4)$, $y_3 = (5, 2, 6, 2)$ respectivement est l'espace R_4 tout entier et trouver la décomposition du vecteur $x = (2, 0, 0, 3)$ suivant ces sous-espaces.

1.5.21. Démontrer que dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ a) l'ensemble L_1 des polynômes pairs $f(t)$ (c'est-à-dire tels que $f(-t)=$ $=f(t)$) et l'ensemble L_2 des polynômes impairs (c'est-à-dire tels que $f(-t)=$ $=-f(t)$) sont des sous-espaces vectoriels; b) l'égalité

$$M_n = L_1 \dot{+} L_2$$

est vérifiée.

1.5.22. Montrer que pour tout sous-espace L_1 d'un espace vectoriel V il existe un *supplémentaire*, c'est-à-dire un sous-espace L_2 tel que

$$V = L_1 \dot{+} L_2.$$

Pour L_1 donné, le supplémentaire est-il déterminé d'une façon unique?

1.5.23. Trouver deux supplémentaires distincts du sous-espace L tendu sur les vecteurs $x_1=(1, 3, 0, -1)$, $x_2=(2, 5, 1, 2)$, $x_3=(1, 2, 1, 3)$.

1.5.24. Trouver dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ le supplémentaire du sous-espace L des polynômes qui satisfont à la condition $f(1)=0$.

1.5.25. Un espace V est décomposé en somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$. Démontrer que

a) si la décomposition d'un vecteur x est $x=x_1+\ldots+x_p$, $x_i \in L_i$, la décomposition du vecteur λx suivant les sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est de la forme

$$\lambda x = \lambda x_1 + \ldots + \lambda x_p;$$

b) si y est un vecteur à décomposition $y_1+\ldots+y_p$, $y_i \in L_i$, la décomposition du vecteur $x+y$ suivant les sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est

$$x+y=(x_1+y_1)+\ldots+(x_p+y_p).$$

CHAPITRE 2

ESPACES EUCLIDIENS ET UNITAIRES

§ 2.0. Terminologie et généralités

Un espace vectoriel réel E est dit *euclidien* si à tout couple de vecteurs x, y de E on fait correspondre un nombre réel noté (x, y) et appelé *produit scalaire* des vecteurs x et y, tout en observant les conditions suivantes :

1. $(x, y)=(y, x)$.
2. $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$.
3. $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$.
4. $(x, x)>0$, si $x\neq 0$.

Ici x, y, z sont des vecteurs arbitraires de E; α, un nombre réel arbitraire.

On appelle *longueur* du vecteur x le nombre (non négatif)

$$|x|=\sqrt{(x, x)}.$$

Le vecteur de longueur égale à l'unité est dit *normé*.

Deux vecteurs quelconques x et y vérifient *l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski :*

$$|(x, y)|\leq|x|\cdot|y|.$$

On dit que les vecteurs x et y sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul. Un système de vecteurs s'appelle *système orthogonal* si tous ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

Soit un système de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linéairement indépendant. Décrivons maintenant le *processus d'orthogonalisation* permettant de passer de ce système au système orthogonal $y_1, y_2, \ldots, y_k$ composé de vecteurs non nuls.

Posons $y_1=x_1$. Les vecteurs consécutifs $y_2, \ldots, y_k$ se construisent d'après les formules :

$$y_l=x_l-\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i^{(l)}y_i, \quad l=2, \ldots, k,$$

$$\alpha_i^l=\frac{(x_l, y_i)}{(y_i, y_i)}, \quad i=1, \ldots, l-1.$$

On dit qu'une base d'un espace euclidien est *orthogonale* si l'espace est un système orthogonal. Si, de plus, les vecteurs de la base sont normés, on

dit que la base est *orthonormée*. Ainsi, une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ est définie par les relations

$$(e_i, e_j)=\begin{cases}1, \text{ si } i=j,\\ 0, \text{ si } i\neq j.\end{cases}$$

Pour des vecteurs non nuls d'un espace euclidien on définit la notion d'angle. Le cosinus de l'angle composé par les vecteurs x et y est donné par la formule

$$\cos(\widehat{x, y})=\frac{(x, y)}{|x|\,|y|}.$$

Un espace vectoriel complexe U est dit *unitaire* si à tout couple de vecteurs, x, y de U on fait correspondre un nombre complexe noté (x, y) et appelé *produit scalaire* des vecteurs x et y, tout en observant les conditions suivantes :

1. $(x, y)=\overline{(y, x)}$.
2. $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$.
3. $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$.
4. $(x, x)>0$, si $x\neq 0$.

Dans un espace unitaire l'angle entre les vecteurs ne se détermine pas. Pourtant, tous les autres résultats et définitions de l'espace euclidien sont également vrais pour l'espace unitaire.

Un exemple typique d'espace unitaire est celui de l'espace arithmétique R_n dans lequel le produit scalaire des vecteurs $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ est donné par la règle :

$$(x, y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n. \qquad (2.0.1)$$

De même, C_n est un espace unitaire typique dans lequel on pose pour les vecteurs x et y

$$(x, y)=\alpha_1\overline{\beta}_1+\alpha_2\overline{\beta}_2+\ldots+\alpha_n\overline{\beta}_n. \qquad (2.0.2)$$

Dans les deux cas, il se trouve que la base naturelle de l'espace arithmétique est orthonormée.

Quelques remarques encore sur les problèmes de calcul de ce chapitre.

Supposons qu'il faut compléter un système orthogonal $a_1, \ldots, a_k$ de vecteurs non nuls d'un espace arithmétique jusqu'à une base orthogonale de cet espace. Cherchons le vecteur a_{k+1} en partant des conditions d'orthogonalité :

$$(a_{k+1}, a_1)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{k+1}, a_k)=0.$$

Ces conditions notées d'après la règle (2.0.1) ou (2.0.2) forment un système d'équations linéaires par rapport aux composantes du vecteur a_{k+1}. On

peut prendre comme a_{k+1} une solution non nulle arbitraire de ce système. Maintenant, le vecteur a_{k+2} s'obtient d'après les conditions :

$$(a_{k+2}, a_1)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{k+2}, a_k)=0,$$
$$(a_{k+2}, a_{k+1})=0,$$

etc. A chaque étape de ce processus, on peut utiliser les résultats des calculs précédents en résolvant les systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss.

D'une façon analogue on construit la base du supplémentaire orthogonal (cf. 2.3.2) de l'enveloppe linéaire du système de vecteurs donné d'un espace arithmétique. La méthode de Gauss peut être appliquée également pour calculer la projection du vecteur sur l'enveloppe linéaire donnée et construire une base biorthogonale à la base donnée (cf. 2.3.10 et 2.3.15).

§ 2.1. Détermination de l'espace euclidien

Présentation des problèmes du paragraphe. Voici les buts que nous nous proposons ici.

Déduire les plus simples corollaires des axiomes du produit scalaire.

Montrer que le produit scalaire peut être introduit dans tout espace vectoriel réel et, de plus, par un nombre infini de procédés. En parlant des espaces arithmétiques R_n, nous donnons des moyens concrets de leur transformation en espaces euclidiens.

Attirer l'attention du lecteur sur le fait que non seulement tout sous-espace d'un espace euclidien est encore un espace euclidien, mais inversement, un produit scalaire donné sur un sous-espace arbitraire d'un espace vectoriel peut aussi être « prolongé » sur cet espace tout entier.

Enfin, nous avons voulu illustrer le rôle de l'axiome sur la positivité du carré scalaire.

2.1.1. Démontrer que des axiomes du produit scalaire on déduit les propriétés suivantes :

a) $(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2)$ quels que soient les vecteurs de l'espace euclidien;

b) $(x, \alpha y)=\alpha(x, y)$ quels que soient les vecteurs x, y de l'espace euclidien et quel que soit le nombre réel α;

c) $(x_1-x_2, y)=(x_1, y)-(x_2, y)$;

d) $(0, x)=0$;

e) $\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{l}\beta_j x_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(x_i, y_j)$.

2.1.2. Démontrer que dans tout espace vectoriel réel on peut déterminer un produit scalaire.

2.1.3. Introduire un produit scalaire dans l'espace arithmétique R_n de dimension n.

2.1.4. Introduire un produit scalaire dans l'espace M_n des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$.

2.1.5. Soit V un espace euclidien muni d'un produit scalaire (x, y). Montrer que si l'on pose

$$\langle x, y\rangle=\lambda(x, y),$$

où λ est un nombre fixé positif, alors $\langle x, y\rangle$ vérifie également tous les axiomes du produit scalaire. Quel est le sens géométrique du passage de (x, y) à $\langle x, y\rangle$ dans l'espace tridimensionnel des vecteurs géométriques?

2.1.6. Démontrer que si $(x, y)_1$ et $(x, y)_2$ sont deux produits scalaires distincts du même espace vectoriel V, alors, dans V,

a) $(x, y)=(x, y)_1+(x, y)_2$;

b) $(x, y)=\lambda(x, y)_1+\mu(x, y)_2$,

où λ et μ sont des nombres non négatifs arbitraires non simultanément nuls, sont également des produits scalaires.

2.1.7. Soient $x=(\alpha_1, \alpha_2)$ et $y=(\beta_1, \beta_2)$ des vecteurs arbitraires de l'espace arithmétique R_2. Montrer que dans R_2 un produit scalaire peut être défini par l'un des procédés suivants :

a) $(x, y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$;

b) $(x, y)=2\alpha_1\beta_1+5\alpha_2\beta_2$;

c) $(x, y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2$.

Calculer le produit scalaire des vecteurs $x=(1, 1)$ et $y=(-3, 2)$ à l'aide de chacun de ces procédés.

2.1.8*. Démontrer que dans R_2 un produit scalaire peut être donné par la formule

$$(x, y)=a\alpha_1\beta_1+b\alpha_1\beta_2+b\alpha_2\beta_1+c\alpha_2\beta_2$$

si et seulement si $a>0$ et $ac>b^2$ simultanément.

2.1.9*. Démontrer que dans R_3 un produit scalaire peut être introduit de la façon suivante : si $x=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $y=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, on a

$$(x, y)=10\alpha_1\beta_1+3\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

2.1.10*. Montrer que dans R_n un produit scalaire peut être défini par la formule

$$\begin{aligned}(x, y)=&\,a_{11}\alpha_1\beta_1+a_{12}\alpha_1\beta_2+\ldots+a_{1n}\alpha_1\beta_n+\\&+a_{21}\alpha_2\beta_1+a_{22}\alpha_2\beta_2+\ldots+a_{2n}\alpha_2\beta_n+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+a_{n1}\alpha_n\beta_1+a_{n2}\alpha_n\beta_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n\beta_n,\end{aligned}$$

sous la condition que

a) $a_{ij}=a_{ji}$ si $i\neq j$;

b) $a_{ii}>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$

2.1.11. Soient a le vecteur fixé d'un espace euclidien V, α le nombre réel fixé. L'ensemble des vecteurs tels que $(x, a)=\alpha$ sera-t-il un sous-espace vectoriel de l'espace V?

2.1.12. Démontrer que tout sous-espace d'un espace euclidien V est lui-même un espace euclidien au sens du produit scalaire donné dans V.

2.1.13. Un espace vectoriel V se décompose en une somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$. Sur chacun des sous-espaces L_i on définit un produit scalaire. Montrer qu'on peut introduire un produit scalaire dans

l'espace V tout entier en adoptant : si x et y sont des vecteurs arbitraires de V muni de décompositions suivant les sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$, $x=x_1+\ldots+x_p$ et $y=y_1+\ldots+y_p$ respectivement, alors

$$(x, y)=(x_1, y_1)_1+\ldots+(x_p, y_p)_p,$$

où le produit scalaire $(x_i, y_i)_i$ se calcule d'après la règle définie dans L_i.

2.1.14. Dans l'espace arithmétique R_4 on définit pour les vecteurs $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de la forme

$$\tilde{x}=(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0), \quad \tilde{y}=(\beta_1, \beta_2, 0, 0)$$

le produit scalaire

$$(\tilde{x}, \tilde{y})_1=\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2,$$

et pour les vecteurs $\tilde{\tilde{x}}$ et $\tilde{\tilde{y}}$ de la forme

$$\tilde{\tilde{x}}=(0, 0, \alpha_3, \alpha_4), \quad \tilde{\tilde{y}}=(0, 0, \beta_3, \beta_4)$$

le produit scalaire

$$(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})_2=\alpha_3\beta_3+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+2\alpha_4\beta_4.$$

Introduire (d'après le procédé décrit dans 2.1.13) le produit scalaire dans l'espace R_4 tout entier. Calculer d'après la règle obtenue le produit scalaire des vecteurs $x=(1, 2, 3, 4)$ et $y=(-3, 1, -3, 2)$.

2.1.15*. Un produit scalaire (x, y) est introduit sur un sous-espace L d'un espace vectoriel V. Démontrer que le produit scalaire peut être défini dans V tout entier de façon que pour les vecteurs x et y de L ce produit coïncide avec le produit scalaire (x, y) initial.

2.1.16*. Démontrer que pour des vecteurs x et y d'un espace euclidien l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

devient égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

2.1.17. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski démontrer les inégalités suivantes :

a) $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right);$

b) $\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\beta_i^2\right).$

Ici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des nombres réels arbitraires; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs.

2.1.18*. Dans la définition du produit scalaire remplacer le quatrième axiome par une condition plus faible : $(x, x) \geq 0$ pour tout vecteur x. Démontrer que dans un espace V muni d'un tel « produit scalaire »

a) l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski est vérifiée;

b) l'ensemble M des vecteurs x tels que $(x, x)=0$ engendre un sous-espace;

c) pour tout x de M et tout y de V le produit scalaire s'annule;

d) si N est un supplémentaire arbitraire de M et si

$$x = x_M + x_N, \quad y = y_M + y_N$$

est la décomposition des vecteurs x et y suivant les sous-espaces M et N, pour les vecteurs x et y l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski devient égalité si et seulement si x_N et y_N sont linéairement dépendants.

2.1.19. Rejeter dans la définition du produit scalaire le quatrième axiome. Dans ce cas là l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski aura-t-elle également lieu?

§ 2.2. Orthogonalité, base orthonormée, orthogonalisation

Présentation des problèmes du paragraphe. Ces problèmes se groupent autour de deux sujets principaux :

Le processus d'orthogonalisation, son application à la construction d'une base orthogonale et à l'établissement de la dépendance linéaire du système de vecteurs donné.

Les bases orthonormées d'un espace euclidien, leur rôle dans le calcul d'un produit scalaire. Nous avons voulu également montrer comment l'orthonormalité d'une base dépend du procédé appliqué pour définir le produit scalaire dans l'espace vectoriel donné.

2.2.1. Démontrer que dans un espace euclidien E :

a) le vecteur nul est le vecteur unique qui possède la propriété d'être orthogonal à tous les vecteurs de l'espace;

b) si l'égalité $(a, x) = (b, x)$ est vraie pour tout vecteur x de E, alors $a = b$.

2.2.2. Démontrer que si $x, y, \ldots, z$ est un système orthogonal de vecteurs, alors, quels que soient les nombres $\lambda, \mu, \ldots, \nu$, le système de vecteurs $\lambda x, \mu y, \ldots, \nu z$ est également orthogonal.

2.2.3. Démontrer que si un vecteur x est orthogonal à chacun des vecteurs $y_1, \ldots, y_l$, il est également orthogonal à toute combinaison linéaire de ces vecteurs.

2.2.4. Démontrer qu'un système orthogonal de vecteurs non nuls est linéairement indépendant.

Dans ce qui suit nous supposons que dans l'espace arithmétique R_n le produit scalaire des vecteurs $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et *$y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ est donné par la formule*

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \tag{2.2.1}$$

Orthogonaliser les systèmes suivants de vecteurs de l'espace R_n :

2.2.5. $x_1 = (1, -2, 2)$,
$x_2 = (-1, 0, -1)$,
$x_3 = (5, -3, -7)$.

2.2.6. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$x_2 = (3, 3, -1, -1)$,
$x_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

2.2.7*. Démontrer que l'orthogonalisation d'un système linéairement indépendant de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ aboutit à un système orthogonal de vecteurs non nuls $y_1, \ldots, y_k$.

2.2.8. Démontrer que dans tout espace euclidien il existe a) une base orthogonale; b) une base orthonormée.

2.2.9. Démontrer que a) tout vecteur non nul peut être inclus dans une certaine base orthogonale d'un espace euclidien; b) tout système orthogonal de vecteurs non nuls peut être complété jusqu'à une base orthogonale de l'espace.

Vérifier si les systèmes de vecteurs suivants sont orthogonaux et les compléter jusqu'à des bases orthonormées :

2.2.10. $x_1=(1,\ -2,\ 1,\ 3)$, $x_2=(2,\ 1,\ -3,\ 1)$.

2.2.11. $x_1=(1,\ -1,\ 1,\ -3)$, $x_2=(-4,\ 1,\ 5,\ 0)$.

Compléter les systèmes de vecteurs suivants jusqu'à des bases orthonormées :

2.2.12. $x_1=\left(-\frac{11}{15},\ -\frac{2}{15},\ \frac{2}{3}\right)$, $x_2=\left(-\frac{2}{15},\ -\frac{14}{15},\ -\frac{1}{3}\right)$.

2.2.13. $x_1=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $x_2=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

2.2.14. Démontrer que dans des bases orthonormées d'un espace euclidien et seulement dans ces bases le produit scalaire de tout couple de vecteurs x et y s'exprime par leurs coordonnées à l'aide de la formule

$$(x,\ y)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n.$$

2.2.15. Démontrer que dans une base orthonormée $e_1,\ \ldots,\ e_n$ les coordonnées $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ d'un vecteur x se calculent d'après les formules

$$\alpha_i=(x,\ e_i),\quad i=1,\ \ldots,\ n.$$

2.2.16. Trouver la dimension du sous-espace engendré par tous les vecteurs x tels que $(a,\ x)=0$. Ici a est un vecteur non nul fixé d'un espace euclidien.

2.2.17*. Soit $e_1,\ \ldots,\ e_n$ une base orthonormée d'un espace euclidien. Trouver l'expression du produit scalaire des vecteurs arbitraires x et y par leurs coordonnées :

a) dans la base $\lambda_1e_1,\ \lambda_2e_2,\ \ldots,\ \lambda_ne_n$, où $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ sont des nombres non nuls;

b) dans la base $e_1+e_2,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n$.

2.2.18. Supposons que nous avons appliqué l'orthogonalisation à un système de vecteurs $x_1,\ \ldots,\ x_k$ arbitraire. Démontrer que

a) si le système $x_1,\ \ldots,\ x_k$ est linéairement dépendant, à un certain pas de l'orthogonalisation on obtient le vecteur nul;

b) si les vecteurs $y_1,\ \ldots,\ y_{l-1}(l\leq k)$ obtenus par orthogonalisation sont non nuls, et si $y_l=0$, alors le sous-système $x_1,\ \ldots,\ x_{l-1}$ du système initial $x_1,\ \ldots,\ x_k$ est linéairement indépendant, et le vecteur x_l s'exprime linéairement par ce sous-système.

En appliquant l'orthogonalisation construire une base orthogonale du sous-espace tendu sur le système de vecteurs donné :

2.2.19. $x_1=(2, 3, -4, -6)$,
$x_2=(1, 8, -2, -16)$,
$x_3=(12, 5, -14, 5)$,
$x_4=(3, 11, 4, -7)$.

2.2.20. $x_1=(1, 1, -1, -2)$,
$x_2=(-2, 1, 5, 11)$,
$x_3=(0, 3, 3, 7)$,
$x_4=(3, -3, -3, -9)$.

2.2.21. Démontrer que si le système de vecteurs de l'espace arithmétique numérique R_n

$$\begin{array}{l} x_1=(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ x_2=(0, \quad \alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ x_3=(0, \quad 0, \quad \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{3n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=(0, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \alpha_{nn}) \end{array}$$

engendre une base orthogonale de cet espace, alors : a) $\alpha_{ii}\neq 0$, $i=1, \ldots, n$; b) $\alpha_{ij}=0$, si $i\neq j$.

2.2.22*. L'espace $R_n (n>1)$ possède une base orthogonale $e_1, \ldots, e_n$ telle que les composantes de chaque vecteur e_i prennent la valeur 1 ou -1. Montrer que l'espace R_n est de dimension 2 ou de dimension multiple de 4.

2.2.23*. Soient le système linéairement indépendant de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ et deux systèmes orthogonaux de vecteurs $y_1, \ldots, y_k$ et $z_1, \ldots, z_k$ tels que les vecteurs y_i et z_i s'expriment linéairement par $x_1, \ldots, x_i$ ($i=1, \ldots, k$). Démontrer que $y_i=\alpha_i z_i (i=1, \ldots, k)$, où $\alpha_i\neq 0$.

2.2.24. Un produit scalaire est introduit de façon arbitraire dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels. Prouver que dans l'espace euclidien obtenu

a) il existe une base orthogonale contenant un polynôme de chaque degré k, $0\leq k\leq n$;

b) si $f_0(t), f_1(t), \ldots, f_n(t)$ et $g_0(t), g_1(t), \ldots, g_n(t)$ sont des bases orthogonales qui jouissent de la propriété indiquée, les polynômes entrant dans ces bases (la numérotation étant convenable) ne se distinguent que par des facteurs scalaires : $g_i(t)=\alpha_i f_i(t)$, $i=0, 1, \ldots, n$.

2.2.25. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base arbitraire d'un espace vectoriel réel V. Démontrer qu'un produit scalaire peut être introduit dans V de façon que le système de vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ soit une base orthonormée de l'espace euclidien obtenu.

2.2.26. Déterminer le produit scalaire dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ de façon que la base

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$$

devienne orthonormée.

§ 2.3. Supplémentaire orthogonal, sommes orthogonales des sous-espaces

Présentation des problèmes du paragraphe. Les buts que se propose surtout le présent paragraphe sont :

Montrer les différentes propriétés de la notion du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace, d'un grand intérêt pour ce qui suit.

Donner des problèmes de calcul des supplémentaires orthogonaux, et, en particulier, attirer l'attention sur la relation entre ces problèmes et la résolution des systèmes d'équations linéaires. Le problème de la perpendiculaire (cf. 2.3.10-2.3.14) adhère ici également.

Indiquer le corollaire si utile des théorèmes des supplémentaires orthogonaux, qui traduit l'existence d'une base biorthogonale pour toute base d'un espace euclidien.

Noter les traits communs entre les théorèmes des sommes directes des sous-espaces d'un espace vectoriel et les théorèmes des sommes orthogonales d'un espace euclidien. En particulier, la décomposition d'un espace euclidien en une somme orthogonale des sous-espaces est un analogue de la décomposition par rapport à une base orthonormée au même sens que les sous-espaces dont la somme directe engendre l'espace vectoriel donné jouent dans cet espace le rôle d'une base généralisée.

2.3.1. Soit L un sous-espace de dimension k d'un espace euclidien E, $k<n$. Démontrer qu'il existe dans E un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs de L (ou, en abrégé, orthogonal au sous-espace L).

2.3.2. Démontrer que l'ensemble $L^{\perp}$ des vecteurs orthogonaux au sous-espace L est également un sous-espace vectoriel. $L^{\perp}$ s'appelle *supplémentaire orthogonal du sous-espace L.*

2.3.3. Soit L un sous-espace arbitraire d'un espace euclidien E. Démontrer que E est somme directe des sous-espaces L et $L^{\perp}$. Porter l'attention sur la relation entre les dimensions des sous-espaces L et $L^{\perp}$ qui se déduit de cette proposition.

2.3.4. Démontrer que le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E jouit des propriétés suivantes :

a) $(L^{\perp})^{\perp}=L$;
b) si $L_1\subset L_2$, on a $L_2^{\perp}\subset L_1^{\perp}$;
c) $(L_1+L_2)^{\perp}=L_1^{\perp}\cap{}_2^{\perp}$;
d) $(L_1\cap L_2)^{\perp}=L_1^{\perp}+L_2^{\perp}$;
e) $E^{\perp}=O$, $O^{\perp}=E$.

Ici O est le sous-espace nul ne contenant que le vecteur nul.

2.3.5. La somme directe des sous-espaces L_1 et L_2 engendre l'espace euclidien E. Démontrer que ceci est également vrai pour leurs supplémentaires orthogonaux, c'est-à-dire que $E=L_1^{\perp}\dotplus L_2^{\perp}$.

2.3.6. Trouver la base du supplémentaire orthogonal $L^{\perp}$ de l'enveloppe linéaire L du système suivant de vecteurs de l'espace R_4 :

$$x_1=(1, 3, 0, 2),\quad x_2=(3, 7, -1, 2),\quad x_3=(2, 4, -1, 0).$$

2.3.7. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée fixée dans un espace euclidien E. Démontrer que

a) si

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n&=0,\\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{mn}\alpha_n&=0 \end{aligned}$$

est un système d'équations linéaires arbitraire à n inconnues, l'ensemble des vecteurs z dont les coordonnées dans la base $e_1, \ldots, e_n$ satisfont à ce système, est un sous-espace vectoriel de l'espace E. Ce sous-espace est de

dimension $n-r$, où r est le rang du système de vecteurs suivant d'un espace arithmétique :

$$n_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$
$$n_2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n_m=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn});$$

b) tout sous-espace L de E peut être décrit par un système d'équations linéaires. Ceci signifie qu'un vecteur z appartient au sous-espace L si et seulement si ses coordonnées dans la base $e_1, \ldots, e_n$ vérifient le système donné. Si r est la dimension du sous-espace L, alors tout système qui décrit ce sous-espace se compose au moins de $n-r$ équations; de plus, il existe un système composé exactement de $n-r$ équations;

c) les systèmes d'équations linéaires qui décrivent dans la base donnée le sous-espace L et son supplémentaire orthogonal $L^{\perp}$ sont liés de la façon suivante : les coefficients du système qui décrit l'un de ces sous-espaces sont les coordonnées des vecteurs sur lesquels est tendu l'autre sous-espace.

2.3.8. Dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels, le produit scalaire des polynômes $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ et $g(t)=$ $=b_0+b_1(t)+\ldots+b_nt^n$ (les coefficients dominants des polynômes pouvant être nuls) est déterminé par la formule

$$(f, g)=a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n. \tag{2.3.1}$$

Trouver le supplémentaire orthogonal :

a) du sous-espace des polynômes vérifiant la condition $f(1)=0$;

b) du sous-espace des polynômes pairs de l'espace M_n.

2.3.9. Trouver les systèmes d'équations linéaires qui décrivent le sous-espace L du problème 2.3.6 et son supplémentaire orthogonal $L^{\perp}$.

2.3.10. Soit L un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Démontrer que tout vecteur x de E peut être représenté d'une façon et d'une seule sous la forme $x=y+z$, où y appartient à L et z est orthogonal à L. Le vecteur y s'appelle *projection orthogonale* du vecteur x sur le sous-espace L, et z *perpendiculaire* abaissée de x sur L. Trouver pour le sous-espace L et le vecteur x donnés le mode de calcul de y et de z.

2.3.11*. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ un système de vecteurs arbitraire d'un espace euclidien E. Démontrer que pour tout vecteur x de E le système d'équations linéaires

$$(x_1, x_1)\alpha_1+(x_2, x_1)\alpha_2+\ldots+(x_k, x_1)\alpha_k=(x, x_1),$$
$$(x_1, x_2)\alpha_1+(x_2, x_2)\alpha_2+\ldots+(x_k, x_2)\alpha_k=(x, x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_1, x_k)\alpha_1+(x_2, x_k)\alpha_2+\ldots+(x_k, x_k)\alpha_k=(x, x_k)$$

possède au moins une solution. Dans quel cas cette solution sera-t-elle unique?

Trouver la projection orthogonale et la perpendiculaire abaissée du vecteur x sur le sous-espace L.

2.3.12. $x=(14, -3, -6, -7)$. L est tendu sur les vecteurs $y_1=(-3, 0, 7, 6)$, $y_2=(1, 4, 3, 2)$, $y_3=(2, 2, -2, -2)$.

2.3.13. $x=(2, -5, 3, 4)$. L est tendu sur les vecteurs $y_1=(1, 3, 3, 5)$, $y_2=(1, 3, -5, -3)$, $y_3=(1, -5, 3, -3)$.

2.3.14. $x=(-3, 0, -5, 9)$. L est donné par le système d'équations

$$\begin{aligned} 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4&=0,\\ 5\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4&=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+10\alpha_4&=0. \end{aligned}$$

2.3.15. On dit *biorthogonaux* pour deux systèmes de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_k$ d'un espace euclidien, si

$$(x_i, y_j)=\begin{cases} 1, & i=j,\\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Démontrer que chacun de deux systèmes biorthogonaux de vecteurs est linéairement indépendant.

2.3.16. Démontrer que pour toute base d'un espace euclidien il existe une base biorthogonale et une seule.

2.3.17. Soit $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ un couple de bases biorthogonales d'un espace euclidien. Démontrer que pour tout k, $1\leq k<n$, le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace tendu sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ coïncide avec l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_{k+1}, \ldots, f_n$.

Trouver les bases biorthogonales des bases suivantes de l'espace R_4 :

2.3.18. $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 2, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 3, 0)$, $e_4=(0, 0, 0, 4)$.

2.3.19. $e_1=(1, 0, 1, 0)$, $e_2=(0, 1, 2, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(0, 0, 3, 1)$.

2.3.20. $e_1=(1, 1, 1, 1)$, $e_2=(0, 1, 1, 1)$, $e_3=(0, 0, 1, 1)$, $e_4=(0, 0, 0, 1)$.

2.3.21. $e_1=(1, 1, 1, 1)$, $e_2=(1, 1, -1, -1)$, $e_3=(1, -1, 1, -1)$, $e_4=(1, -1, -1, 1)$.

2.3.22. Dans un espace euclidien E on a fixé les bases biorthogonales $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$. Montrer que

a) si x est un vecteur arbitraire de E, les coefficients α_i de sa décomposition suivant la base $e_1, \ldots, e_n$: $x=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$ se calculent d'après les formules $\alpha_i=(x, f_i)$, $i=1, \ldots, n$;

b) le produit scalaire des vecteurs arbitraires x et y est défini par la formule

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n}(x, f_i)(y, e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i.$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont les coefficients de la décomposition du vecteur y suivant la base $f_1, \ldots, f_n$.

2.3.23. Les sous-espaces vectoriels $L_1, \ldots, L_p$ d'un espace euclidien E sont *orthogonaux* deux à deux (cela signifie que tout vecteur de chacun des sous-espaces L_i est orthogonal à tous les autres sous-espaces). Démontrer que la somme des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est leur somme directe. (La somme des sous-espaces orthogonaux deux à deux s'appelle *somme orthogonale* notée $L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$.)

2.3.24. Démontrer que la somme L des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ est une somme orthogonale si et seulement si la réunion des bases orthogonales de ces sous-espaces donne la base orthogonale de L.

2.3.25. Démontrer que la somme orthogonale des sous-espaces est commutative : si $L = L_1 \oplus \tilde{L}$ et, de plus, $\tilde{L} = L_2 \oplus L_3$, on a

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3.$$

2.3.26. La somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ engendre l'espace euclidien E. Démontrer que cette somme sera orthogonale si et seulement si le produit scalaire des vecteurs quelconques x et y de E aux décompositions $x = x_1 + \ldots + x_p$ et $y = y_1 + \ldots + y_p$ respectivement, suivant les sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$, vérifie l'égalité

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_p, y_p).$$

2.3.27. Un espace vectoriel V est décomposé d'une façon arbitraire en somme directe des sous-espaces $V = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_p$. Démontrer que dans V un produit scalaire peut être défini de façon que les sous-espaces L_i soient orthogonaux deux à deux.

§ 2.4. Longueurs, angles, distances

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous avons voulu :

Donner quelques problèmes simples relatifs au calcul de la longueur, de l'angle et de la distance, et démontrer que les théorèmes de la géométrie euclidienne élémentaire restent vrais dans un espace euclidien arbitraire.

Interpréter le problème de la décomposition d'un vecteur suivant les supplémentaires orthogonaux comme un problème de la plus courte distance entre un vecteur et un sous-espace.

Définir l'angle entre un vecteur et un sous-espace et montrer que cette définition généralise la notion d'angle entre un vecteur et un plan d'un espace euclidien tridimensionnel.

2.4.1. Démontrer que les longueurs des vecteurs x et $y = \alpha x$ vérifient l'égalité

$$|y| = |\alpha| \, |x|.$$

2.4.2. Comment change l'angle entre les vecteurs non nuls x et y si

a) on multiplie le vecteur x par un nombre positif; b) on multiplie le vecteur x par un nombre négatif; c) on multiplie x et y par des nombres négatifs?

Dans les problèmes qui suivent, par analogie avec un espace euclidien tridimensionnel, le triplet ordonné de vecteurs x, y et $x - y$ d'un espace

euclidien arbitraire est considéré comme un *triangle* dont on dit qu'il est *tendu sur les vecteurs x et y*. On admet également que les diagonales d'un parallélogramme tendu sur les vecteurs x et y sont les vecteurs $x+y$ et $x-y$.

2.4.3. Démontrer que les triangles tendus sur les vecteurs, x, y et αx, αy respectivement, où α est un nombre non nul arbitraire, ont les mêmes angles.

2.4.4. Trouver les longueurs des côtés du triangle tendu sur les vecteurs de l'espace R_4 : $x=(2, -1, 3, -2)$ et $y=(3, 1, 5, 1)$. Déterminer les angles compris entre les côtés du triangle constitués par les vecteurs x, y et $x-y$. Quels sont parmi ces angles ceux qu'il est logique de considérer comme intérieurs, et ceux comme extérieurs?

2.4.5. Formuler et démontrer le théorème des cosinus du triangle tendu sur les vecteurs x et y d'un espace euclidien arbitraire.

2.4.6. Déterminer si le triangle tendu sur les polynômes t^2+3t et $2t^2+2t-1$ est à angle aigu ou à angle obtus et si le produit scalaire des polynômes $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ et $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$ est défini par la formule : a) $(f, g)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$; b) $(f, g)=a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2$.

2.4.7. Démontrer le théorème de Pythagore et la réciproque : deux vecteurs x et y d'un espace euclidien sont orthogonaux si et seulement si $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$.

2.4.8. Démontrer que dans un triangle arbitraire d'un espace euclidien

a) la longueur de chaque côté ne dépasse pas la somme des longueurs des deux autres côtés;

b) la longueur de chaque côté n'est pas inférieure à la grandeur absolue de la différence entre les longueurs des deux autres côtés.

2.4.9. Démontrer que dans le parallélogramme tendu sur les vecteurs x et y, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

2.4.10. Démontrer que $|x|=|y|$ si et seulement si les vecteurs $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux. Quel est le sens géométrique de cette proposition?

2.4.11. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée d'un espace euclidien, x un vecteur normé arbitraire. Démontrer que les coordonnées du vecteur x dans la base $e_1, \ldots, e_n$ sont égales aux cosinus des angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ composés par x et les vecteurs de base. En déduire la relation

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_n=1.$$

2.4.12. On appelle *distance entre les vecteurs x et y* d'un espace euclidien le nombre

$$\varrho(x, y)=|x-y|.$$

Montrer que la distance ainsi définie satisfait à l'inégalité triangulaire

$$\varrho(x, z)\le\varrho(x, y)+\varrho(y, z)$$

quels que soient les trois vecteurs x, y, z.

2.4.13. Prouver que pour les vecteurs x, y et z l'inégalité triangulaire devient égalité si et seulement si $(x-y)=\alpha(y-z)$, $\alpha\ge 0$.

2.4.14. Dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$, le produit scalaire des polynômes

$$f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \text{ et } g(t)=b_0+b_1t+\ldots+b_nt^n$$

est défini par la formule (2.3.1). Pour les polynômes donnés :

$$f_1(t)=3t^2+2t+1, \quad f_2(t)=-t^2+2t+1,$$
$$f_3(t)=3t^2+2t+5, \quad f_4(t)=3t^2+5t+2:$$

a) trouver le polynôme $f_0(t)$ de degré ≤ 2 équidistant de $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

b) déterminer la distance entre $f_0(t)$ et chacun des polynômes $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

c) démontrer que tout polynôme de la forme

$$f_0(t)+m_3t^3+\ldots+m_nt^n$$

est aussi équidistant de $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, et déterminer sa distance jusqu'à ces polynômes.

2.4.15*. Un sous-espace L et un vecteur arbitraire x sont donnés dans un espace euclidien. On appelle *distance entre un vecteur x et un sous-espace L* le nombre

$$\varrho(x, L)=\inf_{y\in L} \varrho(x, y).$$

Démontrer que

a) la distance $\varrho(x, L)$ est égale à la longueur de la perpendiculaire abaissée de x sur L;

b) le vecteur du sous-espace L le plus proche de x est la projection orthogonale de x sur L;

c) pour tout y de L

$$\varrho(x+y, L)=\varrho(x, L).$$

2.4.16*. Le sous-espace L est somme orthogonale des sous-espaces L_1 et L_2. Le vecteur x est orthogonal au sous-espace L_1. Démontrer que

$$\varrho(x, L)=\varrho(x, L_2).$$

2.4.17*. Soient a le vecteur fixé d'un espace euclidien, L le sous-espace de tous les vecteurs orthogonaux à a. Prouver que la distance entre un vecteur arbitraire x et le sous-espace L peut se calculer d'après la formule

$$\varrho(x, L)=\frac{|(x, a)|}{|a|}.$$

2.4.18. Dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ un produit scalaire se calcule d'après la formule (2.3.1) à l'aide des coefficients des polynômes. Trouver la distance entre le sous-espace M_{n-1} engendré par les polynômes de degré $\leq n-1$ et

a) le polynôme t^n;

b) le polynôme $t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$;

c) le polynôme $\alpha t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$.

2.4.19. On considère dans l'espace M_n muni encore de produit scalaire (2.3.1) le sous-espace des polynômes vérifiant la condition $f(1)=0$. Démontrer que la distance entre un polynôme arbitraire $g(t)$ et un sous-espace L vaut

$$\varrho(g, L)=\frac{g(1)}{\sqrt{n+1}}.$$

2.4.20*. Un sous-espace L et un vecteur x sont donnés dans un espace euclidien. On appelle *angle compris entre un vecteur x et un sous-espace L* le plus petit des angles que forme x avec les vecteurs de L. Démontrer que l'angle compris entre x et L est égal à l'angle entre x et sa projection orthogonale y sur L. Montrer que parmi les vecteurs du sous-espace L, les vecteurs de la forme αy, $\alpha>0$, et eux seuls forment un même angle avec le vecteur x.

2.4.21. Démontrer que la somme des angles qu'un vecteur x forme avec un sous-espace arbitraire L et son supplémentaire orthogonal $L^{\perp}$ est égale à $\pi/2$.

2.4.22. Un espace euclidien E est décomposé en une somme orthogonale des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$. Démontrer que les angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ d'un vecteur arbitraire x avec les sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ satisfont à la relation

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_p=1.$$

Comparer cette formule avec celle du problème 2.4.11.

2.4.23. Le sous-espace L est somme orthogonale des sous-espaces L_1 et L_2. Le vecteur x est orthogonal au sous-espace L_1. Démontrer que l'angle compris entre x et L est égal à l'angle compris entre x et L_2.

Trouver l'angle entre un vecteur x et le sous-espace vectoriel tendu sur les vecteurs y_1, y_2, y_3 :

2.4.24. $x=(-3, 15, 1, -5)$;
$y_1=(2, 3, -4, -6)$,
$y_2=(1, 8, -2, -16)$,
$y_3=(1, -5, -2, 10)$.

2.4.25. $x=(3, 1, \sqrt{2}, -2)$;
$y_1=(2, -1, 2, 1)$,
$y_2=(-1, 2, -2, 1)$,
$y_3=(-1, 1, -1, 0)$.

§ 2.5. Espace unitaire

Présentation des problèmes du paragraphe. Les problèmes qui suivent constituent surtout une répétition des problèmes donnés plus haut et qui concernent les espaces euclidiens. Nous avons voulu montrer par cette répétition que les faits essentiels prouvés pour un espace euclidien restent également vrais pour des espaces unitaires quelconques. Nous avons voulu aussi illustrer les différences entre la théorie du cas réel et du cas complexe, en particulier, en partant des théorèmes géométriques. A titre de conclusion nous décrivons le procédé de passage d'un espace euclidien à un espace unitaire (« complexification » de l'espace unitaire) et le passage inverse (« décomplexification »).

2.5.1. Démontrer que les axiomes du produit scalaire dans un espace unitaire entraînent les propriétés suivantes :

a) $(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2)$ quels que soient les vecteurs de l'espace unitaire;

b) $(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y)$ quels que soient les vecteurs x, y de l'espace unitaire et le nombre complexe α;

c) $(0, x)=(x, 0)=0$;

d) $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\bar{\beta}_j(x_i, y_j)$.

2.5.2. Démontrer que dans tout espace vectoriel complexe on peut définir un produit scalaire.

2.5.3. Introduire un produit scalaire dans l'espace arithmétique complexe C_n de dimension n.

2.5.4. Introduire un produit scalaire dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients complexes considéré comme un espace vectoriel complexe muni d'opérations usuelles d'addition des polynômes et de multiplication d'un polynôme par un nombre complexe.

2.5.5. Démontrer que dans l'espace C_n le produit scalaire des vecteurs $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ est défini par la formule

$$\begin{aligned}(x, y)=a_{11}\alpha_1\bar{\beta}_1+a_{12}\alpha_1\bar{\beta}_2+\ldots+a_{1n}\alpha_1\bar{\beta}_n+\\ +a_{21}\alpha_2\bar{\beta}_1+a_{22}\alpha_2\bar{\beta}_2+\ldots+a_{2n}\alpha_2\bar{\beta}_n+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +a_{n1}\alpha_n\bar{\beta}_1+a_{n2}\alpha_n\bar{\beta}_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n\bar{\beta}_n\end{aligned}$$

sous la condition que

a) $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$ pour tout i, j;

b) $a_{ii}>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n$.

2.5.6. Démontrer que, dans des bases orthonormées d'un espace unitaire et dans de telles bases seules, le produit scalaire de deux vecteurs x et y s'exprime par leurs coordonnées d'après la formule

$$(x, y)=\alpha_1\bar{\beta}_1+\alpha_2\bar{\beta}_2+\ldots+\alpha_n\bar{\beta}_n.$$

2.5.7. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski pour un espace unitaire

$$|(x, y)|^2\leq(x, x)(y, y).$$

En déduire la relation

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right|^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\right),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des nombres complexes arbitraires.

2.5.8. Démontrer que dans un espace unitaire arbitraire le théorème de Pythagore reste vrai : si les vecteurs x et y sont orthogonaux, on a

$$|x-y|^2=|x|^2+|y|^2.$$

Montrer également que la réciproque du théorème de Pythagore n'est pas vraie.

2.5.9. Démontrer que les vecteurs x et y d'un espace unitaire sont orthogonaux si et seulement si

$$|\alpha x+\beta y|^2=|\alpha x|^2+|\beta y|^2$$

quels que soient les nombres α et β.

2.5.10. Démontrer que dans le cas d'un espace unitaire la proposition 2.4.10 n'a pas lieu. Laquelle des deux propositions qui constituent le problème cesse d'être vraie?

2.5.11. Démontrer que, par contre, la proposition de 2.4.9

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2,$$

est également vraie pour un espace unitaire.

2.5.12. Démontrer l'égalité

$$4(x, y)=|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2. \qquad (2.5.1)$$

2.5.13*. Soient R l'espace réel, C l'ensemble des sommes formelles $x+iy$, où $x\in R$, $y\in R$. Démontrer que

a) si dans l'ensemble C les opérations linéaires sont définies par les formules

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$\lambda(x+iy)=(\alpha+i\beta)(x+iy)=(\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x),$$

où $\lambda=\alpha+i\beta$ est un nombre complexe arbitraire, l'ensemble C est un espace vectoriel complexe;

b) le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ de l'espace R est linéairement dépendant ou linéairement indépendant de même que le système de vecteurs $x_1+i0, \ldots, x_k+i0$ de l'espace C;

c) la dimension de l'espace C est égale à celle de l'espace R.

Le procédé décrit de la construction d'un espace complexe de même dimension d'après un espace vectoriel donné réel R s'appelle *complexification* de l'espace R.

2.5.14. Soient R l'espace euclidien muni de produit scalaire (x, y), C l'espace complexe obtenu de R par complexification. Démontrer que

a) l'espace C peut être transformé en un espace unitaire en y introduisant un produit scalaire par la formule

$$\langle x_1+iy_1, x_2+iy_2\rangle=[(x_1, x_2)+(y_1, y_2)]+i[(y_1, x_2)-(x_1, y_2)];$$

b) si $e_1, \ldots, e_k$ est un système orthogonal de vecteurs de R, dans l'espace C muni de produit scalaire en question le système de vecteurs $e_1+i0, \ldots$ $\ldots, e_k+i0$ est orthogonal lui aussi;

c) si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée de R, on a que $e_1+i0, \ldots$ $\ldots, e_n+i0$ est une base orthonormée de C.

2.5.15. Complexifier l'espace arithmétique réel R_n de dimension n (muni de produit scalaire ordinaire). Quel est l'espace complexe qu'on obtient ainsi?

2.5.16. Soit C un espace complexe arbitraire. Démontrer que l'ensemble des vecteurs qui engendrent C peut être considéré également comme l'espace vectoriel réel R où a) l'addition coïncide avec l'addition dans C; b) pour tout nombre réel α et tout vecteur z

$$\alpha z=(\alpha+i0)z,$$

où le deuxième membre est le produit du vecteur z par le nombre $\alpha+i0$ défini dans C. Le passage de l'espace complexe C à l'espace réel R s'appelle *décomplexification* de l'espace C.

2.5.17*. Soient C un espace complexe de dimension n, R l'espace réel obtenu de C par décomplexification. Démontrer que

a) si $z_1, \ldots, z_k$ est un système linéairement indépendant (linéairement dépendant) de vecteurs de C, alors $z_1, iz_1, \ldots, z_k, iz_k$ est un système linéairement indépendant (linéairement dépendant) de vecteurs de R (le produit iz_j défini d'après les formules données dans C est précisément un élément de cet espace, et, par conséquent, un élément de R).

b) la dimension de R est $2n$; de plus, à toute base $e_1, \ldots, e_n$ de C correspond la base $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ de R.

2.5.18*. Soient C l'espace unitaire de dimension n muni de produit scalaire (x, y), R l'espace réel obtenu de C par décomplexification. Démontrer que

a) R peut être transformé en un espace euclidien s'il est muni d'un produit scalaire d'après la formule

$$\langle z_1, z_2\rangle = \operatorname{Re}(z_1, z_2);$$

b) pour tout vecteur z de C, les vecteurs z et iz considérés comme des éléments de l'espace euclidien obtenu sont orthogonaux;

c) si $e_1, \ldots, e_k$ est un système orthogonal de vecteurs de C, le système de vecteurs $e_1, ie_1, \ldots, e_k, ie_k$ est orthogonal dans R;

d) si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée de C, le système de vecteurs $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ est une base orthonormée de R.

2.5.19. Démontrer que l'espace arithmétique complexe C_n de dimension n peut être décomplexifié en faisant correspondre à tout vecteur $z=(\alpha_1+i\beta_1, \ldots, \alpha_n+i\beta_n)$ de C_n le vecteur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ de l'espace arithmétique réel R_{2n}. Quel est le vecteur de R_{2n} qui est associé au vecteur iz? Quel produit scalaire est induit dans R_{2n} si C_n est muni d'un produit scalaire ordinaire : pour $z=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $w=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ on pose $(z, w)= =(\lambda_1\bar{\mu}_1+\ldots+\lambda_n\bar{\mu}_n)$?

CHAPITRE 3

DÉTERMINANTS

§ 3.0. Terminologie et généralités

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace euclidien ou unitaire. Posons

$$L_0 = O,\ L_k = L(x_1, \ldots, x_k).$$

Désignons par y_k la perpendiculaire abaissée de x_k sur le sous-espace L_{k-1}.

On appelle *volume d'un parallélépipède* tendu sur un système de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le nombre

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} |y_k|. \tag{3.0.1}$$

Il est évident que le volume d'un tel parallélépipède est nul si et seulement si le système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est linéairement dépendant. Puisque

$$|y_k| \leq |x_k|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

le volume d'un parallélépipède vérifie l'*inégalité d'Hadamard*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \prod_{k=1}^{n} |x_k|, \tag{3.0.2}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si parmi les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un vecteur au moins est nul, ou si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

En suivant V. Voïévodine, nous donnerons au *volume orienté* $V^{\pm}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un *parallélépipède* tendu sur un système de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une définition axiomatique. Plus précisément, nous imposerons que

1. $V^{\pm}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit une fonction linéaire de chacun de ses variables vectorielles $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. $V^{\pm}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, si le système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est linéairement dépendant;
3. $V^{\pm}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ pour une certaine base orthonormée $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

On peut montrer (cf. V. Voïévodine, Algèbre linéaire, chapitre 4) que le volume orienté d'un parallélépipède existe bien et qu'il est égal en

module au volume de ce même parallélépipède. Il s'avère, en particulier, que la condition

$$V^{\pm}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

est nécessaire et suffisante pour assurer la dépendance linéaire du système de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Un volume orienté n'étant pas bien défini, pour rendre évident le volume orienté concret il faut indiquer la base orthonormée $e_1, e_2, \ldots, e_n$ où sa valeur vaut l'unité.

On appelle *matrice carrée d'ordre n* un tableau numérique carré composé de *n lignes* et *n colonnes*

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

Les *éléments* a_{ij} d'une matrice A peuvent être des nombres *réels* ou *complexes;* les matrices respectives sont alors dites *réelles* ou *complexes.*

On dit que les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ constituent la *diagonale principale* de la matrice A; tous les autres éléments a_{ij}, $i \neq j$, sont dits *hors diagonaux.* La matrice dont tous les éléments hors diagonaux sont nuls est dite *diagonale.* Une matrice diagonale s'appelle *matrice unité* si tous les éléments de sa diagonale principale valent l'unité. On emploie également l'expression *diagonale non principale* de la matrice A; elle est composée d'éléments $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$.

On appelle *déterminant* d'une matrice A la somme algébrique de $n!$ termes composée comme suit : ces termes sont des produits de toute sorte de n éléments de la matrice pris un à un de chaque ligne et de chaque colonne, le temps $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$ étant pris avec le signe plus, si le nombre d'inversions de la permutation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est pair, et avec le signe moins, dans le cas contraire. Dans ces conditions on appelle *inversion* des nombres α_i et α_j une situation où $\alpha_i > \alpha_j$, mais, dans la permutation $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, α_i est placé avant α_j. Dans ce qui suit, le déterminant d'une matrice A est noté $|A|$ ou det A.

Si les lignes d'une matrice A sont considérées comme des vecteurs d'un espace arithmétique de dimension n, le déterminant det A n'est rien d'autre que le volume orienté d'un parallélépipède dans cet espace; la base orthonormée correspondante est la base naturelle (1.0.1). On en déduit :

1) det A est une fonction linéaire des lignes de la matrice A;

2) det $A=0$ si et seulement si les lignes de la matrice A sont linéairement dépendants. Une matrice est dite *dégénérée* si son déterminant est nul, et *non dégénérée* dans le cas contraire;

3) le déterminant d'une matrice ne change pas si à une ligne on ajoute une combinaison linéaire d'autres lignes;

4) dans une permutation de deux lignes, un déterminant change de signe.

On appelle *transposition* d'une matrice A une transformation de cette matrice telle que ses lignes deviennent des colonnes affectées de même indice, c'est-à-dire le passage à la *matrice transposée*

$$A^T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (3.0.3)$$

Dans une transposition, le déterminant d'une matrice ne change pas : $\det A = \det A^T$. Il en résulte que les propriétés du déterminant formulées ci-dessus pour les lignes d'une matrice sont également vraies pour ses colonnes.

Fixons dans la matrice A k lignes quelconques d'indices $i_1, i_2, \dots, i_k$ et k colonnes d'indices $j_1, j_2, \dots, j_k$. L'intersection de ces lignes et de ces colonnes forme une matrice d'ordre k dont le déterminant s'appelle *mineur d'ordre k* de la matrice A (ou de son déterminant). En particulier, les éléments a_{ij} sont des mineurs d'ordre 1. S'il faut donner la position d'un mineur, on utilise la notation

$$M = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_k \\ j_1 & j_2 \dots j_k \end{pmatrix}. \qquad (3.0.4)$$

Si de plus les indices des lignes coïncident avec ceux des colonnes nous écrirons pour abréger $A(i_1 i_2 \dots i_k)$.

En supprimant de la matrice A les lignes d'indices $i_1, \dots, i_k$ et les colonnes d'indices $j_1, \dots, j_k$, on obtient le mineur d'ordre $n-k$ dit *complémentaire* du mineur (3.0.4). On appelle le *cofacteur* du mineur (3.0.4) son mineur complémentaire pris avec le signe $(-1)^{s_M}$, où

$$s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k.$$

Le cofacteur de l'élément a_{ij} se note A_{ij}.

On a le

Théorème de Laplace. Soit une matrice A d'ordre n où on choisit arbitrairement k lignes (ou k colonnes), $1 \leq k \leq n-1$. Le déterminant $\det A$ est alors égal à la somme des produits de tous les mineurs d'ordre k contenus dans les lignes choisies par leurs cofacteurs.

Les formules suivantes du *développement d'un déterminant d'après une ligne*

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} &= \det A, \\ a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} &= 0, \ i \neq j. \end{aligned} \qquad (3.0.5)$$

sont un cas particulier du théorème de Laplace. Bien entendu, les formules analogues du *développement d'un déterminant suivant une colonne* sont également vraies.

Voici encore quelques remarques sur les méthodes de calcul des déterminants utilisées dans le présent chapitre.

Comme le montre la méthode de Gauss décrite au § 1.0, cette dernière ramène une matrice carrée à une forme triangulaire. En vertu des propriétés 3 et 4 d'un déterminant indiquées ci-dessus, les transformations utilisées à cet effet peuvent tout au plus changer son signe. Quant au déterminant d'une matrice de forme triangulaire, il est égal (cf. 3.1.8) au produit des éléments de la diagonale principale. C'est en ceci que consiste précisément l'application de la méthode de Gauss au calcul des déterminants. Les divers aspects de cette méthode sont discutés au § 3.4.

Décrivons maintenant la *méthode des récurrences* qu'on peut utiliser pour calculer les déterminants *tridiagonaux* de la forme

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \end{vmatrix}. \qquad (3.0.6)$$

Examinons l'ensemble s des suites numériques infinies

$$x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots), \qquad (3.0.7)$$

complexes, pour fixer les idées. Déterminons les opérations linéaires sur ces suites par les relations

1) $\lambda x=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$;

2) si $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$, alors

$$x+y=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots).$$

Il est clair que là s devient un espace vectoriel.

Dans s un sous-espace est un ensemble F des suites (3.0.7) dont les éléments vérifient la *récurrence* ou l'*équation aux différences du deuxième degré* :

$$\alpha_n=p\alpha_{n-1}+q\alpha_{n-2}, \; n=3, 4, \ldots, \qquad (3.0.8)$$

p, q sont des nombres fixés, $q\neq 0$. On voit aisément que le sous-espace F est de dimension 2. Montrons comment construire sa base.

Composons d'après les coefficients de (3.0.8) l'équation algébrique (dite *caractéristique*)

$$\lambda^2-p\lambda-q=0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1. Les racines de l'équation caractéristique λ_1 et λ_2 sont distinctes. Dans ce cas, la base de F se compose des suites

$$e_1=(\lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^n, \ldots),$$
$$e_2=(\lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^n, \ldots).$$

2. L'équation caractéristique possède une racine double λ. La base de F est composée alors des suites

$$e_1=(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n, \ldots),$$
$$e_2=(1, 2\lambda, 3\lambda^2, \ldots, n\lambda^{n-1}, \ldots).$$

Toute suite (3.0.7) de F peut être développée suivant la base e_1, e_2:

$$x=c_1e_1+c_2e_2.$$

Les composantes de cette relation sont

$$\alpha_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$$

pour le cas 1, et

$$\alpha_n=c_1\lambda^n+c_2n\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(c_1\lambda+c_2n)$$

pour le cas 2.

Les coordonnées c_1 et c_2 de la suite x peuvent être calculées en utilisant seulement ses deux premières composantes. Elles donnent la solution du système d'équations linéaires

$$\lambda_1c_1+\lambda_2c_2=\alpha_1,$$
$$\lambda_1^2c_1+\lambda_2^2c_2+\alpha_2$$

ou

$$\lambda c_1+c_2=\alpha_1,$$
$$\lambda^2c_1+2\lambda c_2=\alpha_2,$$

en fonction du cas considéré.

Reprenons le déterminant (3.0.6). En le développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}, \quad n=3, 4, \ldots,$$

c'est-à-dire une récurrence du deuxième degré. De plus,

$$D_1=a,$$
$$D_2=a^2-bc,$$

et on peut appliquer la construction décrite dans ce qui précède.

§ 3.1. Définition et propriétés élémentaires des déterminants

Présentation des problèmes du paragraphe. Les problèmes de la collection classique que présente ce paragraphe traitent du calcul des déterminants et de leurs propriétés les plus simples. Nous avons en vue les propriétés linéaires, l'invariance dans la transposition, le changement de signe dans la permutation des lignes (colonnes), l'annulation du déterminant dont les lignes (colonnes) sont linéairement dépendantes.

Les produits des éléments d'un déterminant d'ordre 7 donnés ci-dessous font-ils partie du déterminant? Si la réponse est affirmative, quel est leur signe?

3.1.1. $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$.

3.1.2. $a_{23}a_{52}a_{77}a_{34}a_{61}a_{12}a_{45}$.

3.1.3. $a_{71}a_{17}a_{26}a_{62}a_{53}a_{35}a_{44}$.

3.1.4. $a_{26}a_{35}a_{44}a_{17}a_{53}a_{62}a_{31}$.

3.1.5. Compléter le produit des éléments $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$ d'un déterminant d'ordre 7 de façon à obtenir un de ses termes a) avec le signe plus; b) avec le signe moins.

3.1.6. Trouver la relation entre les indices des éléments d'un déterminant qui se trouvent a) sur la diagonale principale; b) au-dessus de la diagonale principale; c) au-dessous de la diagonale principale.

3.1.7. Quel est le signe du produit des éléments de la diagonale principale d'un déterminant d'ordre n?

3.1.8. En appliquant seulement la définition, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.1.9. Quelle est la relation entre les indices des éléments d'un déterminant d'ordre n qui se trouvent a) sur une diagonale non principale; b) au-dessus de la diagonale non principale; c) au-dessous de la diagonale non principale.

3.1.10. Quel est le signe du produit des éléments d'une diagonale non principale d'un déterminant d'ordre n?

3.1.11. En partant de la définition calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En appliquant seulement la définition, calculer les déterminants suivants :

3.1.12. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

3.1.13. $$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.1.14*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{1j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_{2j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & m_{3j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & m_{j-1,j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-2,j} & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{nj} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.1.15. $$\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{-ième ligne} \\ \\ j\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

i-ième colonne $\quad$ j-ième colonne

Les éléments non indiqués ici de la diagonale principale valent un, tous les autres étant nuls.

3.1.16. Montrer que si plus de n^2-n éléments d'un déterminant d'ordre n sont nuls, le déterminant est nul lui aussi.

Calculer les déterminants n'appliquant que la définition :

3.1.17. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3.1.18. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3.1.19. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3.1.20. Démontrer que si à l'intersection de certaines k lignes et l colonnes d'un déterminant d'ordre n $(k+l>n)$ se trouvent les éléments nuls, le déterminant lui-même est nul.

Trouver le nombre maximal des termes non nuls du déterminant d'ordre n de la forme suivante :

3.1.21.
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \dots & 0 & b_1 \\ c_1 & a_2 & 0 \dots & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \dots & 0 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

3.1.22*.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 \dots 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_3 \dots 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 \dots c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

3.1.23*.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mettre le déterminant d'ordre n aux éléments contenant l'inconnue t, sous la forme d'un polynôme rangé dans l'ordre des degrés décroissants de t :

3.1.24.
$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}.$$

3.1.25*.
$$\begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n+t \end{vmatrix}.$$

Quel est le degré des déterminants suivants d'ordre n envisagés comme polynômes de t :

3.1.26. $$\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

3.1.27. $$\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \dots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n}+t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

3.1.28*. Le déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}t & a_{12}+b_{12}t & \dots & a_{1n}+b_{1n}t \\ a_{21}+b_{21}t & a_{22}+b_{22}t & \dots & a_{2n}+b_{2n}t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1}t & a_{n2}+b_{n2}t & \dots & a_{nn}+b_{nn}t \end{vmatrix}$$

est-il toujours de degré n comme polynôme de l'inconnue t?

3.1.29*. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant du problème précédent ait comme polynôme de t un degré inférieur à n.

3.1.30. Trouver le terme constant du polynôme du problème 3.1.28.

3.1.31. Comment changera un déterminant aux éléments complexes si chacun de ces éléments est remplacé par un nombre conjugué?

3.1.32. Comment changera un déterminant d'ordre n si tous ses éléments changent de signe?

3.1.33. Chaque élément d'un déterminant d'ordre n est multiplié par le nombre α. Comment changera le déterminant?

3.1.34*. Comment changera un déterminant si chacun de ses éléments a_{ik} est multiplié par α^{i-k}, le nombre α étant différent de zéro?

3.1.35. La case de l'élément a_{ik} est dite *paire* ou *impaire* suivant que la somme $i+k$ est paire ou impaire. Démontrer que le déterminant ne changera pas si l'on change les signes de tous ses éléments placés dans des cases impaires; mais si le changement de signes porte sur tous les éléments placés dans des cases paires, le déterminant ne changera pas de signe s'il est d'ordre pair, et changera de signe s'il est d'ordre impair.

3.1.36*. Un déterminant est dit *antisymétrique* si ses éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont de signe différent, c'est-à-dire si $a_{ij}=-a_{ji}$ pour tous les i, j.

Démontrer que le déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

3.1.37*. Démontrer que le déterminant dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont des nombres conjugués (c'est-à-dire $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$ pour tous les i, j) est un nombre réel.

3.1.38. Comment changera un déterminant d'ordre n si ses lignes sont écrites dans l'ordre inverse? Quel élément du déterminant initial sera à la place i, j du nouveau déterminant?

3.1.39. Trouver l'élément d'un déterminant d'ordre n symétrique à l'élément a_{ij} par rapport au « centre » du déterminant.

3.1.40. Comment changera un déterminant si chacun de ses éléments est remplacé par un élément symétrique à l'élément donné par rapport au « centre » du déterminant?

3.1.41. Trouver l'élément d'un déterminant d'ordre n symétrique à l'élément a_{ij} par rapport à une diagonale non principale.

3.1.42. Comment changera un déterminant si chacun de ses éléments est remplacé par un élément symétrique à l'élément donné par rapport à une diagonale non principale?

3.1.43*. Comment changera un déterminant d'ordre n si on tourne sa matrice de 90° sur son centre?

Résoudre les équations dont le premier membre s'écrit sous la forme d'un déterminant :

3.1.44. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.1.45. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculer les déterminants suivants :

3.1.46. $$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.1.47. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \dots & n^2 \end{vmatrix}.$$

3.1.48. Soient $f_1(t), \dots, f_n(t)$ des polynômes de degré au plus $n-2$. Démontrer que pour des nombres arbitraires $a_1, a_2, \dots, a_n$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

est nul.

3.1.49. Comment changera un déterminant si a) de chaque ligne sauf la première on retranche la ligne précédente; b) de chaque ligne depuis la deuxième on retranche la ligne précédente tout en retranchant de la première ligne la dernière ligne initiale.

3.1.50. Démontrer qu'un déterminant arbitraire est égal à la demi-somme des déterminants dont l'un s'obtient à partir du déterminant donné en ajoutant à tous les éléments de la i-ième ligne le nombre b, et l'autre s'obtient d'une façon analogue en ajoutant aux éléments de la i-ième ligne le nombre $-b$.

Calculer les déterminants suivants en les mettant sous la forme d'une somme des déterminants :

3.1.51.
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.1.52.
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

3.1.53*.
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.1.54.
$$\begin{vmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \dots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \dots & -2w_2w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \dots & 1-2w_n^2 \end{vmatrix},$$

où $w_1^2+w_2^2+\dots+w_n^2=1$.

3.1.55. Les nombres 20 604, 53 227, 25 755, 20 927 et 78 421 se divisent par 17. Démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

se divise également par 17.

3.1.56. Tous les éléments du déterminant Δ sont des fonctions dérivables d'une variable t. Démontrer que la dérivée de ce déterminant envisagé comme fonction de t satisfait à la formule

$$\Delta' t = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

3.1.57. Exclure dans la définition du déterminant le choix des signes devant ses termes, c'est-à-dire examiner la fonction suivante des éléments de la matrice A

$$p(A) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

où les indices $j_1, j_2, \dots, j_n$ parcourent l'ensemble tout entier des permutations des nombres 1, 2, ..., n. Cette fonction s'appelle *permanent*. Démontrer que de même qu'un déterminant, un permanent vérifie les propriétés suivantes :

a) si tous les éléments d'une ligne arbitraire d'une matrice A sont multipliés par un nombre α, le permanent lui-même est également multiplié par ce nombre;

b) si tous les éléments de la i-ième ligne d'une matrice A sont des sommes

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

le permanent de la matrice A est égal à la somme des permanents de deux matrices qui ne diffèrent de A que par la i-ième ligne : les éléments de l'une de ces lignes sont égaux aux nombres b_j, et ceux de l'autre aux nombres c_j;

c) lorsque la matrice est transposée, le permanent ne change pas.

Toutefois, à la différence d'un opérateur,

d) un permanent ne change pas avec la permutation des lignes (des colonnes) de la matrice.

Construire des exemples qui montrent qu'un permanent peut différer de zéro même si les lignes de la matrice sont linéairement dépendantes et être nul pour une matrice aux lignes linéairement indépendantes.

§ 3.2. Mineurs, cofacteurs et théorème de Laplace

Présentation des problèmes du paragraphe. Voici les questions traitées dans ce qui suit.

Problèmes relatifs à la détermination du mineur, du mineur complémentaire et du cofacteur. On définit également ici les déterminants adjoint et associé et on examine certaines de leurs propriétés.

Exemples d'application du théorème de Laplace, y compris des problèmes de calcul. Exercices sur l'application de la méthode des récurrences, décrite dans l'introduction du chapitre, au calcul des déterminants tridiagonaux.

3.2.1. Trouver pour le déterminant d'ordre n : a) le nombre de mineurs d'ordre k contenus dans k lignes fixées; b) le nombre de tous les mineurs d'ordre k.

3.2.2. Soient M un mineur arbitraire d'un déterminant d'ordre n; M' le mineur complémentaire; $(-1)^{s_M}M'$ le cofacteur du mineur M (ici s_M est la somme des indices des lignes et des colonnes du déterminant qui comportent le mineur M). Montrer que le cofacteur du mineur M' est égal à $(-1)^{s_M}M$.

3.2.3. Le mineur à l'intersection de k lignes et de k colonnes de mêmes indices d'un déterminant s'appelle *mineur principal* d'ordre k. Calculer le nombre de mineurs principaux d'ordre k d'un déterminant d'ordre n.

3.2.4*. Trouver les expressions des coefficients du polynôme $f(t)$ donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix},$$

à l'aide des mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.2.5. Calculer le nombre maximal des mineurs non nuls d'ordre k dans les k premières colonnes du déterminant *quasi triangulaire* d'ordre n :

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

3.2.6. Soit D un déterminant d'ordre $n (n>1)$. Le déterminant D' obtenu à partir de D en remplaçant chaque élément a_{ij} par son cofacteur A_{ij} est dit *adjoint* de D. Le déterminant D'' obtenu de D en remplaçant chaque élément a_{ij} par son mineur complémentaire M_{ij} est dit *associé* de D. Montrer que $D'=D''$.

3.2.7. Démontrer que si un déterminant D est *symétrique* (c'est-à-dire si ses éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont

égaux), le déterminant adjoint D' est également symétrique. Une proposition analogue est vraie pour le déterminant associé D''.

3.2.8. La proposition : si un déterminant D est antisymétrique, son adjoint D' est antisymétrique lui aussi, est-elle vraie?

3.2.9*. Montrer que l'adjoint du déterminant triangulaire du problème 3.1.8 est de la forme

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \dots A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \dots A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} \dots A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots A_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.2.10*. Trouver la relation entre un déterminant triangulaire d'ordre n et son adjoint.

3.2.11*. Comment changera l'adjoint D' si dans le déterminant donné d'ordre n :

a) on multiplie tous les éléments de la i-ième ligne par un nombre α;

b) on permute les i-ième et j-ième lignes;

c) on ajoute à la j-ième ligne la i-ième ligne multipliée par un nombre arbitraire α;

d) on transpose le déterminant D.

3.2.12. Montrer que le développement de Laplace d'un déterminant d'ordre n suivant k lignes (colonnes) quelconques coïncide avec son développement suivant les $n-k$ lignes (colonnes) restantes.

3.2.13. Démontrer que si dans un déterminant d'ordre n tous les mineurs d'ordre $k(k<n)$ sont nuls, les mineurs d'ordre supérieur *à* k sont nuls eux aussi.

3.2.14. Démontrer que dans les premières k colonnes du déterminant *quasi triangulaire*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{k1} \dots a_{kk} & a_{k,k+1} \dots a_{kn} \\ 0 \dots 0 & a_{k+1,k+1} \dots a_{k+1,n} \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

parmi les mineurs d'ordre k il n'y a que le mineur principal qui peut être différent de zéro. Trouver le développement de Laplace de ce déterminant suivant les premières k colonnes.

3.2.15*. On sait que dans les premières k colonnes d'un déterminant d d'ordre n le mineur principal d'ordre k est non nul, alors que tous les autres mineurs d'ordre k sont nuls. Démontrer que d est de la même forme que 3.2.14.

En appliquant le thèorème de Laplace, calculer les déterminants :

3.2.16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3.2.17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3.2.18. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.19. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3.2.21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3.2.22. $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}$.

3.2.23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3.2.24. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.25. $\begin{vmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{vmatrix}$.

3.2.26. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3.2.27. Démontrer que :

a)

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots a_{2,n-1} & 0 & 0 & a_{2,n+2} & \dots a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & a_{n,2n} \\
a_{n+1,1} & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & a_{n+1,2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & \dots a_{2n-1,n-1} & 0 & 0 & a_{2n-1,n+2} & \dots a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\
a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots a_{2n,n-1} & a_{2n,n} & a_{2n,n+1} & a_{2n,n+2} & \dots a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n}
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{2n,n} & a_{2n,n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,n-1} & a_{2,n+2} \\ a_{2n-1,n-1} & a_{2n-1,n+2} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n,2n} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2n} \end{vmatrix};$$

b)

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\
0 & a_{22} & \dots a_{2,n-1} & a_{2n} & 0 & a_{2,n+2} & \dots a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} & 0 & 0 & \dots 0 & a_{n,2n} \\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} & \dots a_{n+1,2n-1} & a_{n+1,2n} \\
0 & a_{n+2,2} & \dots a_{n+2,n-1} & a_{n+2,n} & 0 & a_{n+2,n+2} & \dots a_{n+2,2n-1} & a_{n+2,2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots 0 & a_{2n,n} & 0 & 0 & \dots 0 & a_{2n,2n}
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2,n+2} \\ a_{n+2,2} & a_{n+2,n+2} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n,2n} \\ a_{2n,n} & a_{2n,2n} \end{vmatrix};$$

c)

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\
0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\
a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\
0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\
0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn}
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Transformer les déterminants suivants pour les calculer ensuite en appliquant le théorème de Laplace :

3.2.28. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.29. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

3.2.30. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

3.2.31. $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$.

3.2.32. $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

3.2.33*. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.34. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.35. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.36. Démontrer que les permanents (cf. problème 3.1.57) donnent lieu à un analogue du théorème de Laplace : si dans une matrice carrée A d'ordre n on fixe k lignes (colonnes) $(1 \leq k \leq n-1)$, le permanent de la matrice A est égal à la somme des produits des permanents de toutes les sous-matrices d'ordre k situés dans ces lignes (colonnes) par les permanents des sous-matrices complémentaires (d'ordre $n-k$).

En appliquant la méthode des récurrences calculer les déterminants d'ordre n ci-dessous :

3.2.37. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \ldots 0 \\ 2 & 5 & 2 \ldots 0 \\ 0 & 2 & 5 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 5 \end{vmatrix}$.

3.2.38. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 \ldots 0 \\ 2 & 7 & 6 \ldots 0 \\ 0 & 2 & 7 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 7 \end{vmatrix}$.

3.2.39.
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ & & & & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 3 & 2 & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 & 3 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 2 & 3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

3.2.40.
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.2.41.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.2.42.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.2.43.
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

3.2.44. $$\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 12 \end{vmatrix}.$$

3.2.45. Démontrer l'égalité

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

3.2.46. Trouver la récurrence entre les polynômes de la suite $f_0(\lambda)$, $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$, où $f_0(\lambda) \equiv 1$ et le polynôme $f_i(\lambda) (1 \leq i \leq n)$ est le mineur principal d'ordre i formé des n premières lignes et des n premières colonnes du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & \lambda-a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & \lambda-a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda-a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & & c_n & \lambda-a_n \end{vmatrix}.$$

§ 3.3. Déterminants et volume d'un parallélépipède dans un espace euclidien

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous établissons ici certaines propriétés des déterminants et des volumes des parallélépipèdes dans un espace euclidien ou unitaire de dimension n en utilisant leurs relations naturelles. Ainsi, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est un volume orienté d'un parallélépipède tendu sur un système ordonné de lignes (ou de colonnes) de cette matrice, envisagées comme des vecteurs de l'espace arithmétique correspondant, et le module de ce déterminant coïncide avec le volume de ce même parallélépipède (cf. V. Voïévodine. Algèbre linéaire, chapitre 4). Cette relation permet en particulier d'appliquer aux déterminants l'inégalité d'Hadamard et d'évaluer les grandeurs des déterminants qui leur sont associées, c'est-à-dire d'évaluer les volumes. Nous examinons également les déterminants de Gram et établissons la correspondance entre ces derniers et les volumes. Enfin, nous donnons quelques problèmes qui illustrent la stabilité d'un déterminant orthogonal et l'instabilité d'un déterminant dans le cas général.

3.3.1. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ un système ordonné de lignes d'un déterminant d d'ordre n (ces lignes sont considérées comme vecteurs d'un espace arithmétique de dimension n); $b_1, b_2, \dots, b_n$ le système obtenu à partir de $a_1, a_2, \dots, a_n$ par orthogonalisation. Démontrer que le déterminant d' dont les lignes sont constituées par les vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ est égal au déterminant d.

3.3.2*. Démontrer qu'un déterminant est nul si et seulement si ses lignes (colonnes) sont linéairement dépendantes.

3.3.3. Soit d le déterminant d'ordre n :

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En appliquant la relation entre le module d'un déterminant et le volume d'un parallélépipède dans un espace arithmétique démontrer qu'on vérifie l'inégalité d'Hadamard :

$$|d| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2\right)^{1/2} \dots \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2\right)^{1/2}.$$

3.3.4. Démontrer que l'inégalité d'Hadamard devient égalité si et seulement si soit les lignes du déterminant sont orthogonales deux à deux, soit tous les éléments au moins d'une ligne sont nuls. Une proposition analogue est vraie pour les colonnes d'un déterminant.

3.3.5*. Démontrer que si tous les éléments a_{ij} d'un déterminant d'ordre n sont bornés en module par le nombre M :

$$|a_{ij}| \leq M,$$

a) le module du déterminant d ne dépasse pas $M^n n^{n/2}$;

b) cette estimation s'obtient pour les déterminants à éléments complexes quel que soit n;

c) pour les déterminants à éléments réels cette estimation s'obtient si n est un nombre de la forme $n=2^m$.

3.3.6*. Démontrer que le maximum f_n des modules des déterminants d'ordre n, dont tous les éléments sont des nombres réels appartenant au segment $[-1, 1]$, coïncide avec le maximum g_n des modules des déterminants dont les éléments ne prennent que les valeurs 1 et -1.

3.3.7*. Soit h_n le maximum des modules des opérateurs d'ordre n composés de zéros et d'unités, g_n ayant le même sens que dans le problème 3.3.6. Démontrer que pour les nombres g_n et h_n les relations

$$h_{n-1} \leq h_n \leq g_{n-1} \leq g_n \leq 2^{n-1} h_{n-1}.$$

sont vraies. Noter, en particulier, que le nombre g_n est divisible par 2^{n-1}.

3.3.8. Démontrer, en appliquant l'inégalité d'Hadamard et les inégalités obtenues dans le problème 3.3.7, que pour les déterminants d'ordre 3 :

a) $h_3=2$;

b) $g_3=4$.

Noter que le résultat de b) entraîne que l'estimation de la grandeur d'un déterminant donnée dans le problème 3.3.5, a) ne s'obtient pas pour les déterminants d'ordre 3 à éléments réels.

3.3.9*. Renforcer l'estimation donnée dans le problème 3.3.7 et démontrer que

$$g_n \geq 2g_{n-1}.$$

3.3.10*. Trouver le nombre g_5 et le déterminant aux éléments 1 et -1 égal à g_5. Noter que l'estimation du problème 3.3.5, a) ne s'obtient que pour des déterminants du cinquième ordre à éléments réels.

3.3.11*. Démontrer que si dans l'énoncé du problème 3.3.5 tous les éléments a_{ij} d'un déterminant d sont réels et non négatifs, le module de d vérifie l'estimation

$$|d| \leq M^n 2^{-n}(n+1)^{(n+1)/2}.$$

3.3.12. Formuler les résultats des problèmes 3.3.5-3.3.11 pour les volumes des parallélépipèdes.

3.3.13. On appelle *déterminant de Gram d'un système de vecteurs* x_1, $x_2, \ldots, x_k$ d'un espace euclidien (ou unitaire) le déterminant

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & \ldots & (x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

Sa matrice s'appelle *matrice de Gram du système de vecteurs* $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Quelle est la forme et la valeur du déterminant de Gram si :

a) le système $x_1, \ldots, x_k$ est orthogonal;

b) l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_l$ $(1 \leq l < k)$ est orthogonale à l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_{l+1}, \ldots, x_k$.

3.3.14. Comment changera le déterminant de Gram d'un système de vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$, si :

a) on permute deux vecteurs x_i et x_j;

b) on multiplie un vecteur quelconque du système par le nombre α;

c) on ajoute au vecteur x_i le vecteur x_j multiplié par le nombre β.

Déduire que les transformations élémentaires d'un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ ne compromettent pas l'égalité ou l'inégalité à zéro du déterminant de Gram.

3.3.15*. Démontrer qu'un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ d'un espace euclidien (ou unitaire) est linéairement dépendant si et seulement si le déterminant de Gram de ce système est nul.

3.3.16*. Un certain mineur principal M d'ordre m, $m<k$, d'un déterminant de Gram $G(x_1, \ldots, x_k)$ est nul. Démontrer que dans ce cas tout autre mineur principal qui borde le mineur M est également nul. (On dit que le mineur M_2 borde le mineur M_1 si la matrice du mineur M_2 contient la matrice du mineur M_1 comme une sous-matrice.) En particulier, le déterminant $G(x_1, \ldots, x_k)$ est nul lui-même.

3.3.17. Démontrer que le déterminant de Gram d'un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ ne change pas si un vecteur quelconque de ce système

est remplacé par une perpendiculaire abaissée de ce vecteur sur l'enveloppe linéaire de n'importe quels autres vecteurs du système.

3.3.18*. Soient $x_1, \ldots, x_k$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace euclidien (ou unitaire); $y_1, \ldots, y_k$, le système orthogonal obtenu en appliquant l'orthogonalisation aux vecteurs $x_1, \ldots, x_k$. Démontrer que

$$G(x_1, \ldots, x_k)=G(y_1, \ldots, y_k)=|y_1|^2|y_2|^2\ldots|y_k|^2.$$

En utilisant ce résultat, établir la relation entre le déterminant de Gram du système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ et le volume du parallélépipède tendu sur ce système.

3.3.19. Démontrer que le déterminant de Gram $G(x_1, \ldots, x_k)$ est nul si le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ est linéairement dépendant, et positif si ce système est linéairement indépendant.

3.3.20. Soient A une matrice carrée arbitraire d'ordre n réelle ou complexe; $a_1, \ldots, a_n$ les lignes de cette matrice considérées comme des vecteurs de l'espace arithmétique correspondant; $G(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant de Gram de ce système (on considère ordinairement que pour le cas de l'espace R_n le produit scalaire des vecteurs $x=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $y=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ est donné par la formule (2.2.1), et pour l'espace C_n, par la formule

$$(x, y)=\alpha_1\bar{\beta}_1+\ldots+\alpha_n\bar{\beta}_n. \tag{3.3.1}$$

Démontrer que

$$|\det A|^2=G(a_1, \ldots, a_n).$$

3.3.21*. Démontrer que les propriétés d'un déterminant de Gram établies dans les problèmes 3.3.13-3.3.19 peuvent être démontrées sans recourir à l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, en s'appuyant seulement sur les théorèmes de l'orthogonalité des vecteurs, et déduire cette inégalité de la non-négativité d'un déterminant de Gram.

3.3.22. Démontrer que l'élément maximal en module d'un déterminant de Gram appartient à la diagonale principale de ce déterminant (si ces éléments sont plusieurs, au moins l'un appartient à la diagonale principale).

3.3.23. Démontrer que la distance du vecteur x d'un espace euclidien (ou unitaire) au sous-espace vectoriel L tendu sur un système de vecteurs linéairement indépendant $x_1, \ldots, x_k$ peut se calculer d'après la formule

$$\varrho(x, L)=\left[\frac{G(x, x_1, \ldots, x_k)}{G(x_1, \ldots, x_k)}\right]^{1/2}.$$

3.3.24. Démontrer l'inégalité d'Hadamard pour les déterminants de Gram

$$G(x_1, \ldots, x_k)\leq|x_1|^2\ldots|x_k|^2.$$

Montrer que l'égalité s'obtient ici si et seulement si ou bien les vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ sont orthogonaux deux à deux, ou bien au moins l'un de ces vecteurs est nul.

3.3.25*. Démontrer la généralisation suivante de l'inégalité d'Hadamard pour les volumes des parallélépipèdes

$$V(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k)\leq V(x_1, \ldots, x_l)\cdot V(x_{l+1}, \ldots, x_k),$$

où par $V(\ldots)$ on désigne le volume d'un parallélépipède tendu sur le système de vecteurs correspondant.

Montrer que l'égalité s'obtient ici si et seulement si soit

$$(x_i, x_j)=0, \quad i=1, \ldots, l, \quad j=l+1, \ldots, k,$$

soit au moins l'un des sous-systèmes $x_1, \ldots, x_l$ et $x_{l+1}, \ldots, x_k$ est linéairement dépendant. Enoncer la propriété correspondante des déterminants de Gram.

3.3.26. Soit $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ un système de vecteurs linéairement indépendant d'un système euclidien (ou unitaire). Démontrer que tout vecteur z vérifie la relation suivante des volumes des parallélépipèdes

$$\frac{V(x_1, \ldots, x_k, z)}{V(x_1, \ldots, x_k)} \leq \frac{V(x_1, \ldots, x_{k-1}, z)}{V(x_1, \ldots, x_{k-1})}.$$

En déduire la propriété correspondante des mineurs principaux d'un déterminant de Gram.

3.3.27*. Soit $x_1, \ldots, x_k$ un système de vecteurs arbitraire. Démontrer l'inégalité

$$V^{k-1}(x_1, \ldots, x_k) \leq \prod_{j=1}^{n} V(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k).$$

Etablir le sens géométrique de cette inégalité. Enoncer la propriété analogue des mineurs principaux d'un déterminant de Gram.

3.3.28*. Soit $x_1, \ldots, x_k$ un système de vecteurs orthonormé. Démontrer que pour tout vecteur ε de longueur inférieure à 1 les inégalités

$$1-|\varepsilon| \leq V(x_1, \ldots, x_{l-1}, \tilde{x}_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) \leq 1+|\varepsilon|; \quad \tilde{x}_l = x_l + \varepsilon$$

sont vraies.

3.3.29. On dit qu'un déterminant est *orthogonal* si ses lignes considérés comme des vecteurs d'un espace arithmétique forment un système orthonormé. Reformuler la proposition du problème 3.3.28 pour des déterminants orthogonaux.

3.3.30*. En interprétant le module d'un déterminant d'ordre n comme un volume dans un espace arithmétique de dimension n, établir le sens géométrique des modules des mineurs d'ordre k ($k<n$).

3.3.31. Démontrer

a) en appliquant l'inégalité d'Hadamard aux déterminants (cf. problème 3.3.3);

b) en partant de l'interprétation géométrique des modules des mineurs (cf. problème (3.3.30)), que les mineurs d'un ordre quelconque d'un déterminant orthogonal ne dépassent pas en module l'unité.

Une proposition analogue est-elle vraie pour le cas des déterminants arbitraires égaux en module à l'unité et qui ne sont déjà plus des déterminants orthogonaux?

3.3.32. Montrer que le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.3.2)$$

peut être rendu nul en perturbant un certain élément égal à $2^{-(n-1)}$ en module. Calculer cette perturbation. Associer ce résultat à la question du problème précédent et en donner une explication géométrique.

§ 3.4. Calcul des déterminants par la méthode d'élimination

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous soumettons à l'examen plusieurs questions relatives à la méthode de Gauss appliquée au calcul des déterminants. Nous donnons ici quatre groupes de problèmes sur les sujets suivants :

Relation entre les éléments des déterminants obtenus aux étapes différentes de la réduction à la forme triangulaire, et les mineurs du déterminant initial.

Problèmes pour s'exercer dans l'application de la méthode de Gauss.

Aspects de calcul de la méthode de Gauss : nombre d'opérations arithmétiques, nécessité de contrôler l'accroissement des éléments en cours de réduction et l'utilisation à cet effet des permutations suivant des stratégies différentes.

L'application de la méthode de Gauss à la démonstration du théorème sur le produit kroneckerien des déterminants et certaines conséquences du résultat obtenu.

3.4.1. Pour calculer le déterminant de la matrice A par la méthoαe de Gauss on n'effectuait aucune permutation des lignes et des colonnes, c'est-à-dire on a choisi comme pivots des pas isolés les éléments des cases (1, 1), (2, 2), ..., $(n-1,\ n-1)$ respectivement. Démontrer qu'après $p-1$ pas de réduction, tous les mineurs d'ordre p des premières p lignes de la matrice ne changent pas. Montrer également que ces mineurs ne changent pas non plus aux pas ultérieurs de la réduction.

3.4.2. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Le mineur principal d'ordre r situé à l'intersection des lignes et des colonnes aux indices $1, 2, \ldots, r$ s'appelle *mineur principal directeur* d'ordre r de la matrice A. Démontrer que si les *mineurs principaux directeurs* de la matrice A d'ordres $1, 2, \ldots, n-1$ sont différents de zéro, tous les pivots $a^{(p)}_{p+1,\,p+1}$ utilisés pour l'application de la méthode d'élimination à cette matrice sont également différents de zéro. Trouver l'expression des pivots par les mineurs principaux de A.

3.4.3*. Démontrer que la matrice A d'ordre n vérifie la condition du problème précédent si

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$$

De plus, le déterminant de A est également non nul.

3.4.4*. Démontrer que pour la matrice de Gram d'un système linéairement indépendant de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ d'un espace euclidien (ou unitaire)

on respecte la condition du problème 3.4.2. De plus, tous les pivots obtenus par la méthode de Gauss appliquée à cette matrice sont positifs et non supérieurs à l'élément maximal de la matrice initiale.

3.4.5. Démontrer que si le déterminant d'une matrice A est non nul, on peut en permutant les lignes et les colonnes de A rendre tous les mineurs principaux directeurs différents de zéro.

3.4.6*. L'application de la méthode de Gauss à une matrice A n'a pas donné lieu à des permutations. Trouver l'expression des éléments non nuls de la p-ième ligne de la matrice $A^{(p-1)}$ obtenue après le $(p-1)$-ième pas à l'aide des mineurs de la matrice initiale.

3.4.7. En utilisant le résultat fourni par le problème 3.4.6 montrer que si dans une matrice A d'ordre n tous les mineurs d'ordre $r+1$ qui bordent le mineur principal directeur non nul d'ordre r, $1 \leq r \leq n-1$ (la définition d'un tel mineur est donnée dans le problème 3.3.16) sont nuls, le déterminant de A est nul lui aussi.

3.4.8*. Démontrer que si une matrice A d'ordre n possède un mineur M non nul d'ordre r, $1 \leq r \leq n-1$, tel que tous les mineurs d'ordre $r+1$ qui le bordent soient nuls, le déterminant de A est nul. Pour justifier cette proposition il suffit même que soient nuls seulement tous les mineurs qui bordent le mineur donné et qui se trouvent dans les $r+1$ lignes fixées de A (r de ces lignes coïncident avec les lignes auxquelles appartient le mineur M).

3.4.9*. En appliquant la méthode de Gauss montrer que la relation entre un déterminant d d'ordre n et son adjoint d',

$$d' = d^{n-1},$$

établie dans le problème 3.2.10 pour des déterminants triangulaires, est vraie pour tout déterminant d.

En appliquant la méthode de Gauss calculer les déterminants suivants :

3.4.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3.4.11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

3.4.12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3.4.13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

3.4.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

3.4.15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

3.4.16*. $$\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 10 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \\ 168 & 140 & 120 & 105 \end{vmatrix}.$$

3.4.17*. $$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \end{vmatrix}.$$

3.4.18. $$\begin{vmatrix} 2 & 1000 & 4 & 0{,}08 \\ 1 & 3000 & -6 & 0{,}02 \\ 3 & -2000 & 2 & -0{,}02 \\ 2 & -1000 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.4.19. $$\begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}.$$

3.4.20. $$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}.$$

3.4.21. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0{,}002 \\ 3 & 8 & 0 & -0{,}004 \\ 2 & 2 & -4 & -0{,}003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}.$$

3.4.22. $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.4.23. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{vmatrix}.$$

3.4.24. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3.4.25. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.4.26. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

3.4.27. $$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 6 \end{vmatrix}.$$

3.4.28. Trouver la valeur du polynôme $f(t)$ écrit sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix},$$

pour $t=2$.

3.4.29. Trouver le nombre de multiplications et de divisions nécessaires pour calculer un déterminant d'ordre n par la méthode de Gauss. Comparer ce nombre au nombre de multiplications du calcul d'un déterminant en partant directement de sa définition.

3.4.30. Dans l'hypothèse que l'application de la méthode de Gauss n'a pas donné lieu à des permutations, trouver le nombre de multiplications et de divisions nécessaires pour calculer :

a) le déterminant quasi triangulaire d'ordre n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

b) le déterminant tridiagonal d'ordre n

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

3.4.31. Supposons qu'il faille calculer le déterminant d_n d'ordre n dont on sait qu'il n'est pas nul et que le déterminant d_{n+1} d'ordre $n+1$ qui le borde s'écrit

$$d_{n+1}=\left|\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & d_n & & a_2 \\ & & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots\; b_n & c \end{array}\right|.$$

Arranger les calculs de la méthode de Gauss de façon à obtenir pour les deux déterminants d_n et d_{n+1} le même nombre de multiplications et de divisions que celui nécessaire dans le cas d'un seul déterminant d'ordre $n+1$.

3.4.32. On demande de calculer k déterminants d'ordre n qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la dernière colonne. On sait que tous les déterminants sont différents de zéro. Arranger les calculs d'après la méthode de Gauss de façon que la recherche de tous les k déterminants n'impose que $O(kn^2)$ multiplications supplémentaires par rapport au nombre nécessaire pour calculer un seul déterminant d'ordre n.

3.4.33*. Trouver le mode de calcul du déterminant d'ordre n de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ici les éléments diagonaux $a_{22}, \dots, a_{n-1,n-1}$ sont différents de zéro) tel que le nombre d'opérations soit fonction de n en tant que polynôme du deuxième degré (et non pas du troisième degré comme c'est le cas de la méthode de Gauss appliquée aux déterminants de forme générale).

3.4.34. Examiner l'ensemble D_n des déterminants d'ordre n qui satisfont aux conditions suivantes :

a) tous les éléments du déterminant sont bornés en module par l'unité;
b) il existe un élément égal à l'unité en module;
c) tous les mineurs pivots principaux sont différents de zéro.

Dans le calcul d'un déterminant de l'ensemble D_n cette dernière condition permet d'appliquer la méthode de Gauss sans faire appel aux permutations (cf. problème 3.4.2). Montrer, pourtant, que si k est un entier quelconque de la suite $1, 2, \dots, n-1$; N étant un nombre positif quelconque, il existe un déterminant de l'ensemble D_n tel que dans la matrice obtenue après k

pas de la méthode de Gauss sans permutations, on ait un élément $a_{ij}^{(k)}$ supérieur en module au nombre N. Par là même, quel que soit le rang du mot machine fourni par un ordinateur, il existe un déterminant de l'ensemble D_n dont le calcul par la méthode de Gauss conduit à la sursaturation.

3.4.35*. Examiner la variante suivante de la méthode de Gauss prévue pour éviter la sursaturation évoquée dans le problème 3.4.34. Après k pas de réduction à la forme triangulaire, on choisit parmi les éléments $a_{k+1,k+1}^{(k)}$, $a_{k+2,k+1}^{(k)}$, ..., $a_{n,k+1}^{(k)}$ comme pivot du $(k+1)$-ième pas successif l'élément maximal en module. Supposons que ce soit l'élément $a_{j,k+1}^{(k)}$, $j \geq k+1$; alors, les lignes d'indices $k+1$ et j sont permutées de façon que l'élément maximal en module passe dans la case $(k+1, k+1)$, après quoi on procède aux transformations usuelles du $(k+1)$-ième pas de la méthode de Gauss. Cette variante s'appelle méthode d'élimination avec choix du pivot suivant une colonne. Démontrer que dans cette méthode :

a) si tous les éléments $a_{k+1,k+1}^{(k)}$, $a_{k+2,k+1}^{(k)}$, ..., $a_{n,k+1}^{(k)}$ de la colonne du pivot sont nuls, le déterminant initial est nul;

b) pour toute case (i, j)

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| \leq 2 \max_{r,s} \left|a_{rs}^{(k)}\right| ;$$

c) pour un déterminant d'ordre n tous les éléments qui s'obtiennent par réduction à une forme triangulaire sont supérieurs en module au plus de 2^{n-1} fois à l'élément maximal du déterminant initial.

3.4.36*. Construire un exemple qui confirme que dans la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant une colonne, la réduction à la forme triangulaire peut rendre possible l'accroissement du module maximal des éléments jusqu'à l'estimation donnée dans le problème 3.4.35, c).

3.4.37. Démontrer qu'en appliquant la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant une colonne :

a) à un déterminant quasi triangulaire d'ordre n, pendant la réduction, le module maximal des éléments ne peut s'accroître que de n fois au plus;

b) à un déterminant tridiagonal d'ordre n, pendant la réduction, le module maximal des éléments ne peut s'accroître que de deux fois au plus, c'est-à-dire

$$\max_{r,s} \left|a_{rs}^{(k)}\right| \leq 2 \max_{r,s} \left|a_{rs}\right|, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

3.4.38. Comme le montre le problème 3.4.36, la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant une colonne peut, toutefois, donner lieu à l'accroissement rapide du module maximal des éléments. Là encore, lorsqu'on calcule sur un ordinateur un déterminant d'ordre suffisamment grand, une sursaturation devient possible. Aussi utilise-t-on quelquefois une autre variante de la méthode de Gauss : on prend comme pivot du $(k+1)$-ième pas l'élément maximal en module de la sous-matrice d'ordre $n-k$ formée des dernières lignes et colonnes de la matrice $A^{(k)}$ obtenue après k pas précédents. On effectue la permutation des lignes et des colonnes d'indices

supérieurs à k dans le but de faire passer l'élément maximal en module dans la case $(k+1, k+1)$, après quoi on réalise le $(k+1)$-ième pas de façon usuelle. Cette variante s'appelle méthode de Gauss avec choix du pivot suivant toute la matrice. Démontrer que dans cette dernière méthode, le module du pivot du $(k+1)$-ième pas n'est pas supérieur au double du module du pivot du k-ième pas. Une proposition analogue est-elle vraie pour la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant une colonne?

3.4.39*. D'après une hypothèse, dans la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant toute la matrice, le module maximal des éléments d'un déterminant d'ordre n à éléments réels en croissant ne dépasse pas n. En utilisant le résultat du problème 3.3.8, démontrer cette hypothèse pour $n=3$.

3.4.40. Déduire du résultat du problème précédent que si l'on applique la méthode de Gauss avec choix du pivot suivant toute la matrice :

a) aux matrices réelles d'ordre 4, l'accroissement du module maximal ne dépasse pas 6;

b) aux matrices réelles d'ordre 5, l'accroissement du module maximal ne dépasse pas 9.

3.4.41*. On appelle *produit kroneckerien des déterminants* d'ordre n

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et d'ordre m

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

le déterminant d'ordre mn suivant :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} \dots a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} \dots a_{1n}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1m} \dots a_{1n}b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} \dots a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} \dots a_{nn}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1m} \dots a_{nn}b_{1m} \\ a_{11}b_{21} \dots a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} \dots a_{1n}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2m} \dots a_{1n}b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{21} \dots a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} \dots a_{nn}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{2m} \dots a_{nn}b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}b_{m1} \dots a_{1n}b_{m1} & a_{11}b_{m2} \dots a_{1n}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{mm} \dots a_{1n}b_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{m1} \dots a_{nn}b_{m1} & a_{n1}b_{m2} \dots a_{nn}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{mm} \dots a_{nn}b_{mm} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, la matrice du déterminant D se compose de m^2 cases d'ordre n. Ces cases s'obtiennent de la matrice A par multiplication de tous ses éléments

par $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1m}, b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2m}, \ldots, b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mm}$ respectivement. En appliquant la méthode de Gauss, démontrer que

$$D=(\det A)^m(\det B)^n.$$

3.4.42. Démontrer qu'un produit kroneckerien de deux déterminants orthogonaux : d d'ordre n et d' d'ordre m, est un déterminant d'ordre mn.

3.4.43. Trouver la relation entre le déterminant d'une matrice A d'ordre n et les déterminants des matrices d'ordre $2n$ composées de la façon suivante :

a) $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$.

CHAPITRE 4

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

§ 4.0. Terminologie et généralités

Le tableau numérique rectangulaire composé de m lignes et n colonnes

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

s'appelle *matrice rectangulaire* de type $m \times n$ (ou matrice $m \times n$) *réelle* ou *complexe* suivant que les *éléments* a_{ij} de cette matrice sont réels ou complexes.

Pour une matrice rectangulaire le mineur d'ordre k se définit de même qu'au § 3.0 (cas particulier d'une matrice carrée). De plus, $k \leq \min(m, n)$. La notation du mineur se conserve également :

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}.$$

L'ordre supérieur r des mineurs différents de zéro d'une matrice A s'appelle *rang* de cette matrice, alors que tout mineur non nul d'ordre r, *mineur de base* de A. Si tous les éléments d'une matrice sont nuls (une telle matrice est dite *nulle*), on admet par définition que son rang soit nul.

Si les lignes de A sont envisagées comme des vecteurs de dimension n, et les colonnes, comme des vecteurs de dimension m, alors le rang du système de lignes, ainsi que le rang du système de colonnes, est égal au rang de la matrice A. Il s'ensuit que le rang d'une *transposée* A^T de type $n \times m$ (cf. § 3.0) coïncide avec celui de A.

Soient dans un espace vectoriel V de dimension n le vecteur x_0 et le sous-espace L fixés. L'ensemble P des vecteurs de la forme

$$x=x_0+y, \ y \in L,$$

s'appelle *plan engendré par la translation du sous-espace L d'un vecteur* x_0, noté x_0+L. x_0 s'appelle *vecteur de translation*, et L *sous-espace directeur* du plan P.

Si on envisage le sous-espace L comme l'enveloppe linéaire $L(q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_k)$, on peut écrire l'équation paramétrique du plan P :

$$x = x_0 + t_1 q_1 + t_2 q_2 + \ldots + t_k q_k;$$

ici, les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_k$ prennent des valeurs numériques arbitraires.

On peut montrer (cf. 4.2.1) que pour le plan donné, le sous-espace directeur est bien défini. C'est pourquoi on peut attribuer à tout plan une *dimension* égale à la dimension de son sous-espace directeur. Dans ces conditions, le plan de dimension 1 s'appelle *ligne droite*, et le plan de dimension $(n-1)$ *hyperplan.*

Les plans $P_1 = x_1 + L_1$ et $P_2 = x_2 + L_2$ sont dits *parallèles* si $L_1 \subset L_2$, ou bien $L_2 \subset L_1$.

Voici encore quelques définitions et résultats relatifs aux systèmes d'équations linéaires (ces systèmes ont également fait l'objet de l'étude du § 1.0).

Un système d'équations linéaires est dit *homogène* si les seconds membres de toutes ses équations sont nuls, et *non homogène* dans le cas contraire.

La matrice A composée de coefficients affectés aux inconnues s'appelle *matrice du système d'équations* considéré. Si on ajoute à A la colonne des seconds membres du système, on obtient ce qu'on appelle la *matrice complète* $\bar{A}$ *du système.*

Supposons que dans un système d'équations le nombre d'inconnues soit égal au nombre d'équations. Alors, la matrice A du système est carrée, et la condition $\det A \neq 0$ assure sa compatibilité et son caractère bien défini. Dans ce cas, la solution unique $x_1, \ldots, x_n$ peut se calculer d'après les *formules de Cramer*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ième colonne par la colonne des seconds membres.

Deux remarques sur les problèmes de ce chapitre. Au § 4.2 nous donnons toute une série de problèmes de calcul relatifs à la détermination de la position réciproque des plans dans un espace vectoriel. Pour les résoudre on peut appliquer les méthodes du chapitre 1; telles sont la recherche du rang du système donné de vecteurs, l'intersection de deux enveloppes linéaires, etc.

Comme nous le montrons au § 4.5, l'ensemble des solutions d'un système non homogène d'équations linéaires peut être considéré comme un plan dans un espace arithmétique. Supposons que nous ayons introduit dans l'espace un produit scalaire. Parmi les vecteurs d'un plan quelconque, il y a un vecteur et un seul, orthogonal au sous-espace directeur de ce plan (cf. problème 4.3.11) : c'est le *vecteur normal.* La solution correspondante d'un système d'équations linéaires s'appelle *solution normale.* Cette notion est utilisée, par exemple, dans le problème 4.5.36.

§ 4.1. Rang d'une matrice

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce qui suit nous donnons des problèmes pour illustrer les différentes définitions du rang d'une matrice et leurs applications dans le calcul des matrices concrètes.

4.1.1. Montrer que dans r lignes (colonnes) linéairement indépendantes quelconques d'une matrice, il existe un mineur non nul d'ordre r.

4.1.2*. Une matrice rectangulaire A de type $m\times n$ $(m\geq n)$ possède un mineur d'ordre $(n-1)$ différent de zéro, tous les mineurs d'ordre n qui le *bordent* étant nuls. Démontrer que *tous* les mineurs d'ordre n de A sont nuls et donc le rang de A est $n-1$.

4.1.3*. Une matrice A possède un mineur M non nul d'ordre r; tous les mineurs qui bordent M sont nuls. Montrer que le rang de A est r.

4.1.4. Que peut-on dire d'une matrice $m\times n$ $(m>n)$ de rang n, si elle ne possède qu'un seul mineur de base?

4.1.5*. Que peut-on dire d'une matrice $m\times n$ arbitraire si elle ne possède qu'un seul mineur de base?

4.1.6*. Démontrer qu'à l'intersection de r lignes linéairement indépendantes quelconques et de r colonnes linéairement indépendantes quelconques d'une matrice de rang r se trouve un mineur non nul d'ordre r.

4.1.7. Une matrice carrée A est dite *symétrique* si $a_{ij}=a_{ji}$ quels que soient i, j. Démontrer que le rang d'une matrice symétrique est égal à l'ordre maximal des mineurs principaux non nuls de cette matrice.

4.1.8. Montrer que la proposition du problème **4.1.7** est vraie également pour une matrice *hermitienne* complexe A, c'est-à-dire pour une matrice dont $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$ quels que soient i, j.

4.1.9*. Prouver que le rang d'un système de vecteurs arbitraire d'un espace euclidien (ou unitaire) est égal au rang de la matrice de Gram de ce système.

4.1.10. Une matrice carrée A est dite *antisymétrique* si $a_{ij}=-a_{ji}$ quels que soient i, j. Démontrer que le rang d'une matrice antisymétrique est égal à l'ordre maximal des mineurs principaux non nuls de cette matrice.

4.1.11. Démontrer que le rang d'une matrice antisymétrique est un nombre pair.

4.1.12. Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n n'est pas nul. Démontrer que pour tout r, $1\leq r\leq n-1$, en permutant seulement les lignes, on peut rendre différent de zéro le mineur pivot principal d'ordre r de cette matrice.

4.1.13. Démontrer qu'en permutant seulement les lignes d'une matrice carrée à déterminant non nul, on peut rendre différents de zéro tous les mineurs pivots principaux de cette matrice.

4.1.14. Le rang d'une matrice A de type $m\times n$ est égal à 1. Démontrer qu'il existe des nombres $b_1, \ldots, b_m$ et $c_1, \ldots, c_n$ tels que, quels que soient i, j,

$$a_{ij}=b_ic_j.$$

Ces nombres, sont-ils bien définis?

4.1.15. Les lignes d'une matrice A de type $m\times n$ sont orthogonaux comme vecteurs d'un espace arithmétique de dimension n; de plus, chaque ligne possède au moins un élément non nul. Démontrer que $n\geq m$.

4.1.16. Démontrer que le rang de la matrice A de la forme

$$A=\begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}$$

est égal à la somme des rangs des sous-matrices nulles de dimensions correspondantes.

4.1.17. La proposition : le rang de la matrice A de la forme

$$A=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}$$

est toujours égal à la somme des rangs des sous-matrices A_{11} et A_{22}, est-elle vraie?

4.1.18. Comment peut changer le rang d'une matrice si on change la valeur de l'un de ses éléments?

4.1.19. Comment peut changer le rang d'une matrice si on change les éléments d'une seule de ses lignes? de k lignes?

4.1.20*. Démontrer que dans une matrice $n\times n$ de rang r il existe k éléments tels que leur changement en grandeur absolue aussi petit que l'on veut augmente le rang de la matrice jusqu'à $r+k$, $1\leq k\leq n-r$.

4.1.21. Indiquer les valeurs possibles du rang de la matrice qui s'écrit

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

4.1.22. Démontrer que dans une matrice carrée $n\times n$ à déterminant non nul, le rang de toute sous-matrice d'ordre $n-1$ vaut au moins $n-2$.

4.1.23. Prouver que deux systèmes de vecteurs d'un espace arithmétique

$$\begin{aligned} x_1&=(a_{11}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n}), \\ x_2&=(a_{21}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k&=(a_{k1}, \dots, a_{ki}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{kn}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1&=(a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{1n}), \\ y_2&=(a_{21}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k&=(a_{k1}, \dots, a_{kj}, \dots, a_{ki}, \dots, a_{kn}) \end{aligned}$$

ont le même rang.

4.1.24. Démontrer que la dimension de l'enveloppe linéaire tendue sur le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ est égale au rang de la matrice composée de coordonnées de ces vecteurs dans une base arbitraire de l'espace.

4.1.25. Démontrer que le vecteur b appartient à l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ si et seulement si le rang de la matrice composée de coordonnées des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ dans une base quelconque de l'espace est égal au rang de la matrice complète composée de coordonnées dans la même base des vecteurs $x_1, \ldots, x_k, b$.

4.1.26. Démontrer que les transformations élémentaires (cf. problème 1.2.17) d'un système de lignes ou d'un système de colonnes d'une matrice ne changent pas son rang.

4.1.27. Prouver que toute matrice $m\times n$ peut être ramenée par des transformations élémentaires des lignes et des colonnes à la forme

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

où $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ sont différents de zéro et où r est égal au rang de la matrice linéaire. Comparer cette proposition au problème 1.2.18.

Calculer le rang des matrices suivantes :

4.1.28. $\begin{Vmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{Vmatrix}.$

4.1.29. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{Vmatrix}.$

4.1.30*. $\begin{Vmatrix} 1241 & 381 & 273 & -165 \\ 134 & -987 & 562 & 213 \\ 702 & 225 & -1111 & 49 \end{Vmatrix}.$

4.1.31. $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{Vmatrix}.$

4.1.32. $\begin{Vmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

4.1.33. $$\begin{Vmatrix} 9 & -12 & 3 & -4 & 12 & -16 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 15 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{Vmatrix}.$$

4.1.34. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel tendu sur le système de vecteurs $x_1=(73, -51, 13, 42, 15)$, $x_2=(44, -32, 5, 25, 3)$, $x_3=(76, -52, 16, 44, 18)$, $x_4=(-37, 27, -4, -21, -2)$.

4.1.35. Le sous-espace vectoriel L est tendu sur les vecteurs $x_1=(2, 4, 8, -4, 7)$, $x_2=(4, -2, -1, 3, 1)$, $x_3=(3, 5, 2, -2, 4)$, $x_4=(-5, 1, 7, -6, 2)$.

Les vecteurs suivants

a) $b_1=(6, 18, 1, -9, 8)$;

b) $b_2=(6, 18, 1, -9+\varepsilon, 8)$;

c) $b_3=(6, 18, 1, -9, 8+\varepsilon)$

appartiennent-ils à cet espace?

Ici ε est un nombre quelconque différent de zéro.

4.1.36*. Démontrer que le rang de la matrice A de type $k\times n$ de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_k & a_k^2 & \dots & a_k^{n-1} \end{Vmatrix},$$

où $k\leq n$ et $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des nombres entiers distincts, est égal à k.

§ 4.2. Plans dans un espace vectoriel

Présentation des problèmes du paragraphe. Les problèmes ci-dessus traitent surtout de deux questions suivantes :

Détermination des plans dans un espace vectoriel, dimension d'un plan.

Position relative des plans.

A la fin du paragraphe nous établissons certaines relations entre les plans de dimension arbitraire et les hyperplans.

4.2.1. Démontrer que deux plans $P_1=x_1+L_1$ et $P_2=x_2+L_2$ coïncident si et seulement si $L_1=L_2$ et $x_1-x_2\in L_1$. Par là même le sous-espace directeur est bien défini pour chaque plan.

4.2.2. Déduire du résultat du problème précédent que pour le plan donné comme vecteur de translation on peut prendre l'un quelconque de ses vecteurs.

4.2.3. Démontrer que si les vecteurs x_1 et x_2 appartiennent au plan $P=x_0+L$, alors $x_1-x_2\in L$. Inversement, si $x_1\in P$ et $x_1-x_2\in L$, alors $x_2\in P$.

4.2.4. Démontrer que le plan $P=x_0+L$ est un sous-espace si et seulement si $x_0\in L$.

4.2.5. Démontrer que pour que le plan $P=x_0+L$ soit un sous-espace, il suffit que la somme de vecteurs quelconques x_1 et x_2 de P appartient à L.

4.2.6. Démontrer que l'intersection du plan $P=x_0+L$ avec un sous-espace quelconque supplémentaire de L se compose d'un seul vecteur.

4.2.7. Le plan de dimension 0 que représente-t-il?

4.2.8. Le plan de dimension n dans un espace vectoriel V de dimension n que représente-t-il?

4.2.9. Démontrer que dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ l'ensemble des polynômes $f(t)$ vérifiant la condition $f(a)=b$, où a et b sont des nombres fixés, est un plan. Trouver la dimension de ce dernier.

4.2.10. Démontrer qu'un plan de dimension k qui n'est pas un sous-espace possède un système linéairement indépendant composé de $k+1$ vecteurs.

4.2.11. Prouver que dans un plan de dimension k tout système composé de $k+2$ vecteurs est linéairement dépendant.

4.2.12. Démontrer que pour $k+1$ vecteurs linéairement indépendants il existe un plan et un seul de dimension k contenant ces vecteurs.

4.2.13. Démontrer que le plan de dimension k contenant les vecteurs linéairement indépendants $x_0, x_1, \ldots, x_k$ peut être décrit comme l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_kx_k$ vérifiant la condition $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=1$.

4.2.14. Démontrer que si l'intersection de deux plans $P_1=x_1+L_1$ et $P_2=x_2+L_2$ n'est pas vide, elle est un plan à sous-espace directeur $L_1\cap L_2$.

4.2.15. Appelons *somme* P_1+P_2 *des plans* $P_1=x_1+L_1$ et $P_2=x_2+L_2$ l'ensemble des vecteurs de la forme z_1+z_2, où $z_1\in P_1$, $z_2\in P_2$. Démontrer que la somme des plans P_1 et P_2 est également un plan. Trouver son sous-espace directeur.

4.2.16. Appelons *produit* λP *d'un plan* $P=x_0+L$ *par un nombre* λ l'ensemble des vecteurs de la forme λz, où $z\in P$. Démontrer que le produit du plan P par le nombre λ est également un plan. Trouver son sous-espace directeur.

4.2.17. Dans un espace vectoriel V on fixe le sous-espace L. L'ensemble M des plans de l'espace V engendrés par la translation du sous-espace L sera-t-il un espace vectoriel par rapport à l'addition et la multiplication par un nombre, définies dans les problèmes 4.2.15 et 4.2.16?

4.2.18. Changer la définition de la multiplication d'un plan par un nombre de façon que l'ensemble M du problème 4.2.17 devienne un espace vectoriel. Indiquer l'élément nul de cet espace. (L'espace M ainsi obtenu s'appelle *espace quotient de l'espace V par le sous-espace L.*)

4.2.19. Soit L de l'énoncé du problème 4.2.18, un sous-espace de dimension k d'un espace V de dimension n. Quelle est la dimension de l'espace M?

4.2.20. Dans l'espace R_5 on donne le plan $x=x_0+t_1p_1+t_2p_2$, où $x_0=(2, 3, -1, 1, 1)$, $p_1=(3, -1, 1, -1, 1)$, $p_2=(-1, 1, 1, 1, -1)$. Etablir si les vecteurs $z=(1, 6, 4, 4, -2)$ et $v=(1, 6, 5, 4, -2)$ appartiennent à ce plan.

4.2.21. Démontrer que si une droite possède deux vecteurs communs avec un plan, cette droite appartient à ce plan.

4.2.22. Déterminer la position relative du plan $P=x_0+L$, où $x_0=(1, 0, 0, 1)$ et L est tendu sur les vecteurs $y_1=(5, 2, -3, 1)$, $y_2=(4, 1, -1, 0)$, $y_3=(-1, 2, -5, 3)$, et des droites

a) $x=x_1+tq_1$, $x_1=(3, 1, -4, 1)$, $q_1=(-1, 1, 2, 1)$;
b) $x=x_2+tq_2$, $x_2=(3, 0, -4, 1)$, $q_2=(-1, 1, 2, 1)$;
c) $x=x_3+tq_3$, $x_3=(-2, 0, -1, 2)$, $q_3=(1, 1, -2, 1)$.

4.2.23. Démontrer que les droites $x=x_1+tq_1$ et $x=x_2+tq_2$, où $x_1=(9, 3, 6, 15, -3)$, $q_1=(7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2=(-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2=(2, 9, -10, -6, 4)$, sont concourantes. Trouver leur intersection. Indiquer le plan de dimension 2 auquel appartiennent ces droites.

4.2.24*. Démontrer que les droites $x=x_1+tq_1$ et $x=x_2+tq_2$, où $x_1=(8, 2, 5, 15, -3)$, $q_1=(7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2=(=7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2=(2, 9, -10, -6, 4)$, ne sont pas concourantes. Construire le plan de dimension 3 contenant ces deux droites.

Déterminer la position relative des plans $P_1=x_0+t_1p_1+t_2p_2$ et $P_2=$ $=y_0+t_1q_1+t_2q_2$:

4.2.25. $x_0=(3, 1, 2, 0, 1)$, $p_1=(2, -6, 3, 1, -6)$,
$y_0=(1, 0, 1, 1, 0)$, $q_1=(-1, 1, -1, 0, 1)$,
$p_2=(0, 5, -2, -1, 6)$,
$q_2=(-1, 3, -1, -1, 2)$.

4.2.26. $x_0=(7, -4, 0, 3, 2)$, $p_1=(-1, 1, 1, 1, 1)$,
$y_0=(6, -5, -1, 2, 3)$, $q_1=(1, 1, -1, 1, 1)$,
$p_2=(1, -1, 1, 1, 1)$,
$q_2=(1, 1, 1, -1, 1)$.

4.2.27. $x_0=(2, -3, 1, 5, 0)$, $p_1=(3, -2, 1, 0, 1)$,
$y_0=(0, -1, 0, 4, 1)$, $q_1=(1, 2, 4, 0, -2)$,
$p_2=(-1, 5, -2, 0, 3)$,
$q_2=(6, 3, 4, 0, 3)$.

4.2.28. $x_0=(-3, -2, 1, -1, 2)$, $p_1=(1, -1, 1, 1, 3)$,
$y_0=(-1, 0, 3, 3, 8)$, $q_1=(1, 1, -3, -3, 1)$,
$p_2=(-1, 2, 1, 2, -2)$,
$q_2=(0, 1, 2, 3, 1)$.

4.2.29. $x_0=(1, 2, 0, 2, 1)$, $p_1=(5, -2, 6, 1, -4)$,
$y_0=(1, 2, 1, 2, 1)$, $q_1=(1, -4, 0, 1, -6)$,
$p_2=(2, 1, 3, 0, 1)$,
$q_2=(-3, 3, -3, -1, 5)$.

4.2.30. $x_0=(4, 1, 10, -3, 5)$, $p_1=(2, 1, 3, 0, 1)$,
$y_0=(-3, 2, 1, -4, 8)$, $q_1=(3, -3, 3, 1, -5)$,
$p_2=(1, -4, 0, 1, -6)$,
$q_2=(5, -2, 6, 1, -4)$.

4.2.31. Démontrer que si la droite $x=x_0+tq$ et l'hyperplan $\pi=y_0+L$ ne sont pas concourants, alors $q\in L$.

4.2.32. Démontrer que si les hyperplans $\pi_1 = x_0 + L_1$ et $\pi_2 = y_0 + L_2$ ne sont pas sécants, alors $L_1 = L_2$.

4.2.33*. Démontrer que si l'intersection des hyperplans $\pi_1, \ldots, \pi_k$ d'un espace de dimension n n'est pas vide, elle constitue un plan d'une dimension $n-k$ au moins.

4.2.34*. Démontrer que tout plan de dimension k dans un espace de dimension n peut être donné comme l'intersection de $n-k$ hyperplans.

§ 4.3. Plans dans un espace euclidien

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous discutons des modes différents de la représentation des hyperplans dans un espace euclidien et établissons la correspondance entre les plans et les systèmes d'équations linéaires. Nous introduisons la notion du vecteur normal d'un plan et examinons certains problèmes géométriques associés à la détermination des distances. A titre de conclusion, nous considérons comme important de noter que la description des plans par des systèmes d'équations linéaires que nous avons obtenue pour des bases orthonormées d'un espace euclidiens est en fait possible dans toute base d'un espace vectoriel.

4.3.1*. Démontrer qu'un ensemble des vecteurs d'un espace euclidien (unitaire) E vérifiant la condition $(n, x) = b$, où n est le vecteur non nul fixé et b le nombre donné, est un hyperplan de cet espace. Dans quel cas cet hyperplan est un sous-espace?

4.3.2. Démontrer que l'hyperplan donné par la condition $(n, x) = b$ peut être décrit également par la condition $(n, x - x_0) = 0$, où x_0 est un vecteur arbitraire de cet hyperplan.

4.3.3*. Démontrer que tout hyperplan d'un espace euclidien peut être donné par la condition de la forme $(n, x) = b$.

4.3.4. Démontrer que si les conditions $(n_1, x) = b_1$ et $(n_2, x) = b_2$ définissent un même hyperplan, alors pour un certain nombre non nul α, $n_1 = \alpha n_2$; $b_1 = \alpha b_2$.

4.3.5. Dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ le produit scalaire est défini par la formule (2.3.1). Pour l'hyperplan donné par la condition $f(c) = d$, trouver la notation de la forme $(n, f) = b$. Indiquer le polynôme correspondant $n(t)$.

4.3.6. Est-ce que tout hyperplan d'un espace des polynômes (cf. problème précédent) peut être donné par la condition de la forme $f(c) = d$?

4.3.7. Démontrer que dans chaque base orthonormée d'un espace tout hyperplan peut être décrit par l'équation du premier degré

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n = b$$

par rapport aux coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des vecteurs de cet hyperplan.

4.3.8*. Démontrer que si l'intersection des hyperplans de l'espace de dimension n

$$\begin{gathered}(n_1, x) = b_1,\\ (n_2, x) = b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (n_k, x) = b_k\end{gathered}$$

n'est pas vide, c'est un plan de dimension $n-r$, où r est le rang d'un système de vecteurs $n_1, \ldots, n_k$.

4.3.9. Dans un espace euclidien (unitaire) E on a fixé la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$. Démontrer que

a) si

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n &= b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{aligned}$$

est un système compatible arbitraire d'équations linéaires à n inconnues, alors l'ensemble des vecteurs z dont les coordonnées dans une base $e_1, \ldots, e_n$ satisfont à ce système, est un plan de l'espace E. Ce plan est de dimension $n-r$, où r est le rang de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| ;$$

b) tout plan P de l'espace E peut être décrit par un certain système d'équations linéaires. Ceci signifie que le vecteur z appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées dans une base $e_1, \ldots, e_n$ satisfont au système donné. Si r est la dimension du plan P, tout système qui décrit ce plan compte au moins $n-r$ équations, et, en outre, il existe un système tel qu'il se compose exactement de $n-r$ équations.

4.3.10. Trouver le système d'équations linéaires qui décrit le plan $P=x_0+L$, où $x_0=(1, 1, 1, 1)$ et L est tendu sur les vecteurs $y_1=(1, 3, 0, 2)$, $y_2=(3, 7, -1, 2)$, $y_3=(2, 4, -1, 0)$.

4.3.11. Démontrer que parmi les vecteurs de tout plan P il existe un vecteur z_0 et un seul orthogonal au sous-espace directeur de ce plan. Le vecteur z_0 s'appelle *vecteur normal* du plan P.

4.3.12. Montrer que parmi tous les vecteurs d'un plan P, le plus petit en longueur est le vecteur normal z_0.

4.3.13. Montrer que le vecteur normal z_0 d'un plan P est égal à la perpendiculaire abaissée d'un vecteur arbitraire de ce plan sur le sous-espace directeur.

4.3.14. Trouver le vecteur normal z_0 d'un hyperplan donné par la condition $(n, x)=b$.

4.3.15. Soit z_0 le vecteur normal d'un plan P (ne coïncidant pas avec l'espace P tout entier). Démontrer que le plan P appartient à l'hyperplan $(z_0, x)=(z_0, z_0)$.

4.3.16. Déterminer dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ à produit scalaire (2.3.1) le vecteur normal du plan donné par les conditions $f(0)=1$, $f(1)=1$.

4.3.17. On appelle *distance du vecteur x au plan $P=x_0+L$* le nombre

$$\varrho(x, P)=\inf_{u\in P}\varrho(x, u).$$

Démontrer que la distance $\varrho(x, P)$ est égale à la longueur de la perpendiculaire abaissée du vecteur $x-x_0$ sur le sous-espace L.

4.3.18. Le sous-espace L est tendu sur le système de vecteurs linéairement indépendants $y_1, \ldots, y_k$. En utilisant le résultat du problème **4.3.17** et les propriétés des déterminants de Gram, démontrer que la distance du vecteur x au plan $P=x_0+L$ s'écrit

$$\varrho(x, P)=\left(\frac{G(y_1, \ldots, y_k, x-x_0)}{G(y_1, \ldots, y_k)}\right)^{1/2}.$$

4.3.19. Trouver la distance du vecteur $x=(5, 3, -1, -1)$ au plan $P=x_0+L$, où $x_0=(0, 0, -3, 6)$ et L est tendu sur le système de vecteurs $y_1=(1, 0, 2, -2)$, $y_2=(0, 1, 2, 0)$, $y_3=(2, 1, 6, -4)$.

4.3.20. On appelle *distance entre deux plans* $P_1=x_1+L$ et $P_2=x_2+L_2$ le nombre

$$\varrho(P_1, P_2)=\inf_{u_1\in P_1,\, u_2\in P_2}\varrho(u_1, u_2).$$

Prouver que la distance $\varrho(P_1, P_2)$ est égale à la longueur de la perpendiculaire abaissée du vecteur x_1-x_2 sur le sous-espace $L=L_1+L_2$.

4.3.21. Prouver que le carré de la distance entre les droites $l_1=x_1+tq_1$ et $l_2=x_2+tq_2$ est égal à :

a) $\varrho^2(l_1, l_2)=\dfrac{G(q_1q_2, x_1-x_2)}{G(q_1, q_2)}$, si les droites l_1 et l_2 ne sont pas parallèles;

b) $\varrho^2(l_1, l_2)=\dfrac{G(q_1, x_1-x_2)}{(q_1, q_1)}$, si les droites l_1 et l_2 sont parallèles.

Trouver la distance entre les droites $l_1=x_1+tq_1$ et $l_2=x_2+tq_2$.

4.3.22. $x_1=(5, 2, 0, 3)$, $q_1=(1, 2, -4, 1)$; $x_2=(3, -1, 3, 1)$, $q_2=(1, 0, -1, 0)$.

4.3.23. $x_1=(5, 4, 3, 2)$, $q_1=(1, 1, -1, -1)$; $x_2=(2, 1, 4, 3)$, $q_2=(-3, -3, 3, 3)$.

Trouver la distance entre les plans $P_1=x_0+t_1p_1+t_2p_2$ et $P_2=y_0+t_1q_1+t_2q_2$:

4.3.24. $x_0=(89, 37, 111, 13, 54)$, $p_1=(1, 1, 0, -1, -1)$,
$y_0=(42, -16, -39, 71, 3)$, $q_1=(1, 1, 0, 1, 1)$,
$p_2=(1, -1, 0, -1, 1)$,
$q_2=(1, -1, 0, 1, -1)$.

4.3.25. $x_0=(5, 0, -1, 9, 3)$, $p_1=(1, 1, 0, -1, -1)$,
$y_0=(3, 2, -4, 7, 5)$, $q_1=(1, 1, 0, 1, 1)$,
$p_2=(1, -1, 0, -1, 1)$,
$q_2=(0, 3, 0, 1, -2)$.

4.3.26. $x_0=(4, 2, 2, 2, 0)$, $p_1=(1, 2, 2, -1, 1)$,
$y_0=(-1, 1, -1, 0, 2)$, $q_1=(8, 7, -2, 1, -1)$,
$p_2=(2, 1, -2, 1, -1)$,
$q_2=(-5, -4, 2, -1, 1)$.

4.3.27. Démontrer que dans une base quelconque d'un espace vectoriel tout hyperplan peut être décrit par une équation du premier degré par rapport aux coordonnées des vecteurs de cet hyperplan (comparer au problème 4.3.7).

4.3.28. Démontrer que dans une base quelconque d'un espace vectoriel tout plan de dimension r peut être décrit par un système de $n-r$ équations linéaires par rapport aux coordonnées des vecteurs de ce plan.

4.3.29. Soient P un certain plan d'un espace vectoriel qui n'est pas un sous-espace, x un vecteur arbitraire de ce plan. Montrer que dans cet espace on peut introduire un produit scalaire de façon que x soit un vecteur normal du plan P.

§ 4.4. Systèmes homogènes d'équations linéaires

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous avons cru opportun de dégager les problèmes relatifs aux systèmes homogènes d'équations linéaires dans un paragraphe spécial; à la différence du cas non homogène, ici la question de compatibilité ne se pose pas, et, d'ailleurs, la structure algébrique de l'ensemble des solutions est tout autre : pour un système homogène c'est un sous-espace et pour un système non homogène, un plan.

L'attention est portée surtout aux deux problèmes classiques qui consistent à rechercher la solution générale et à construire le système fondamental de solutions. Nous avons voulu insister sur la relation entre ces deux modes de description du sous-espace des solutions d'un système homogène; le problème 4.4.13 montre que les formules de la solution générale se confondent avec la description de ce sous-espace à l'aide d'un système fondamental spécial.

A la fin du paragraphe nous indiquons certaines applications des systèmes homogènes d'équations linéaires aux problèmes de l'espace vectoriel : calcul de la base et de la dimension d'un sous-espace, vérification de l'équivalence de deux systèmes de vecteurs, etc.

4.4.1. Montrer que l'ensemble des solutions d'un système homogène arbitraire d'équations linéaires est un sous-espace. A cet effet, envisager les solutions comme les vecteurs de l'espace arithmétique correspondant.

4.4.2. Deux systèmes homogènes d'équations linéaires

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}x_1+\ldots+b_{ln}x_n=0 \end{gathered}$$

sont dits *équivalents* s'ils possèdent le même ensemble de solutions. Démontrer que les systèmes considérés sont équivalentes si et seulement si sont équivalents les systèmes de vecteurs

$$u_1=(a_{11}, \ldots, a_{1n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m=(a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

et

$$v_1=(b_{11}, \ldots, b_{1n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_l=(b_{l1}, \ldots, b_{ln}).$$

4.4.3. Un système homogène de m équations à n inconnues possède une matrice des coefficients des inconnues dont le rang est r. Démontrer que la dimension du sous-espace des solutions de ce système est $n-r$.

4.4.4. Indiquer toutes les valeurs du paramètre λ telles que le système d'équations

$$\begin{aligned}(8-\lambda)x_1+2x_2+3x_3+\lambda x_4&=0,\\ x_1+(9-\lambda)x_2+4x_3+\lambda x_4&=0,\\ x_1+2x_2+(10-\lambda)x_3+\lambda x_4&=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+\lambda x_4&=0\end{aligned}$$

ne soit pas défini.

Trouver la dimension du sous-espace des solutions du système en fonction de la valeur du paramètre λ :

4.4.5.
$$\begin{aligned}(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+2\lambda x_3+2\lambda x_4&=0,\\ (-1+\lambda)x_1+(2-2\lambda)x_2-2\lambda x_3-2\lambda x_4&=0,\\ (1-\lambda)x_1+\lambda x_2+(2+\lambda)x_3+(1+2\lambda)x_4&=0,\\ (-1+\lambda)x_1-\lambda x_2-2\lambda x_3+(2-3\lambda)x_4&=0.\end{aligned}$$

4.4.6.
$$\begin{aligned}-4x_1+(2+2\lambda)x_2+2\lambda x_3+2\lambda x_4&=0,\\ \lambda x_1+(1+\lambda)x_2+\lambda x_3+\lambda x_4&=0,\\ \lambda x_1+(1+\lambda)x_2-2x_3+\lambda x_4&=0,\\ -\lambda x_1-(1+\lambda)x_2-\lambda x_3-(2+2\lambda)x_4&=0.\end{aligned}$$

4.4.7. Soit un système homogène d'équations de rang r. Démontrer que la permutation des équations et le changement de la numérotation des inconnues permet d'obtenir que dans la matrice du système les mineurs d'ordre 1, 2, ..., r des premières lignes et colonnes seraient différentes de zéro.

Dans les problèmes 4.4.8-4.4.15 on examine le système homogène d'équations

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0.\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

On suppose que le rang de ce système soit r et que dans la matrice du système les mineurs d'ordre 1, 2, ..., r des premières et des dernières lignes et colonnes soient différents de zéro (d'après le problème 4.4.7, on peut toujours l'obtenir en changeant l'ordre des équations et des inconnues).

4.4.8. Démontrer qu'en appliquant la méthode d'élimination au système (4.4.1) on peut choisir comme pivots des pas isolés a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, ..., $a_{rr}^{(r-1)}$ pour obtenir finalement le système d'équations de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r \quad +a_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n &=0,\\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2r}^{(1)}x_r \quad +a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n &=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{rr}^{(r-1)}x_r \quad +a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}^{(r-1)}x_n &=0 \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

en omettant les équations dont tous les coefficients sont nuls.

4.4.9. Montrer que le système (4.4.2) permet de trouver les expressions de la forme ci-dessous des inconnues x_1, ..., x_r par les inconnues non principales x_{r+1}, ..., x_n :

$$\begin{aligned} x_1&=c_{11}x_{r+1}+c_{12}x_{r+2}+\ldots+c_{1,n-r}x_n,\\ x_2&=c_{21}x_{r+1}+c_{22}x_{r+2}+\ldots+c_{2,n-r}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r&=c_{r1}x_{r+1}+c_{r2}x_{r+2}+\ldots+c_{r,n-r}x_n. \end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

On appelle ces formules *solution générale* du système (4.4.1). Cette appellation traduit le fait qu'en donnant aux inconnues non principales des valeurs arbitraires, on trouve d'après les formules (4.4.3) les r premières composantes de la solution du système (4.4.1) et, inversement, toute solution de ce système peut s'obtenir de cette façon pour des valeurs correspondantes des inconnues non principales.

4.4.10*. Démontrer que les solutions du système (4.4.1)

$$\begin{aligned} y_1&=(x_{11}, \ldots, x_{1r}, x_{1,r+1}, \ldots, x_{1n}),\\ y_2&=(x_{21}, \ldots, x_{2r}, x_{2,r+1}, \ldots, x_{2n}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_k&=(x_{k1}, \ldots, x_{kr}, x_{k,r+1}, \ldots, x_{kn}) \end{aligned}$$

sont linéairement dépendantes si et seulement si les vecteurs de dimension $n-r$

$$\begin{aligned} z_1&=(x_{1,r+1}, \ldots, x_{1n}),\\ z_2&=(x_{2,r+1}, \ldots, x_{2n}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_k&=(x_{k,r+1}, \ldots, x_{kn}). \end{aligned}$$

sont linéairement dépendants.

4.4.11. Démontrer qu'une base du sous-espace des solutions du système (4.4.1) peut s'obtenir de la façon suivante : fixer un certain déterminant

non nul d'ordre $n-r$ et envisageant à tour de rôle ses lignes comme des valeurs des inconnues non principales $x_{r+1}, \ldots, x_n$, trouver d'après les formules (4.4.3) les valeurs correspondantes des inconnues $x_1, \ldots, x_r$. Les $n-r$ solutions ainsi construites forment justement une base. Toute base du sous-espace des solutions d'un système d'équations homogène s'appelle *système fondamental de solutions* de ce système.

4.4.12. Montrer que le choix du déterminant étant convenable, tout système fondamental de solutions du système (4.4.1) peut être construit de la façon décrite dans le problème 4.4.11.

4.4.13. Montrer que les vecteurs

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{r1}, 1, 0, \ldots, 0), \\ y_2 &= (c_{12}, c_{22}), \ldots, c_{r2}, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-r} &= (c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \ldots, c_{r,n-r}, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

engendrent le système fondamental de solutions du système d'équations (4.4.1). Ici c_{ij} sont les coefficients des formules (4.4.3).

En complétant les formules (4.4.3) par les identités

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= x_{r+1}, \\ x_{r+2} &= x_{r+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n, \end{aligned}$$

interpréter la solution générale comme une représentation de toute solution du système (4.4.1) par la combinaison linéaire des solutions $y_1, y_2, \ldots y_r$, dont les coefficients sont les valeurs des inconnues non principales.

4.4.14*. Démontrer que le rang de la matrice C de type $r\times(n-r)$ composée de coefficients des formules (4.4.3) est égal au rang de la sous-matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,r+1} & a_{m,r+2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

de la matrice des coefficients du système (4.4.1).

4.4.15. Démontrer que dans les formules (4.4.3) tous les coefficients de l'inconnue non principale $x_k (r<k\leq n)$ sont nuls si et seulement si tous les coefficients de cette inconnue sont nuls dans le système initial (4.4.1).

Trouver la solution générale et le système fondamental de solutions des systèmes d'équations

4.4.16. $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0.$

4.4.17. $9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=0,$
$12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=0.$

4.4.18.
$$\begin{aligned}14x_1+35x_2-7x_3-63x_4&=0,\\ -10x_1-25x_2+5x_3+45x_4&=0,\\ 26x_1+65x_2-13x_3-117x_4&=0.\end{aligned}$$

4.4.19.
$$\begin{aligned}2x_1-5x_2+4x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4&=0,\\ 4x_1-9x_2+8x_3+5x_4&=0,\\ -3x_1+2x_2-5x_3+3x_4&=0.\end{aligned}$$

4.4.20.
$$\begin{aligned}2x_1+x_2+4x_3+x_4&=0,\\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4&=0,\\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4&=0,\\ x_1\qquad+8x_3+7x_4&=0.\end{aligned}$$

4.4.21.
$$\begin{aligned}x_1+4x_2+2x_3\qquad-3x_5&=0,\\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5&=0,\\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.22.
$$\begin{aligned}2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5&=0,\\ -4x_1+5x_2-7x_3+3x_4+8x_5&=0,\\ 8x_1-9x_2+13x_3+15x_4+2x_5&=0,\\ 10x_1-12x_2+17x_3+12x_4-11x_5&=0,\\ -6x_1+7x_2-10x_3-9x_4+3x_5&=0,\\ -14x_1+17x_2-24x_3-15x_4+19x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.23.
$$\begin{aligned}2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5&=0,\\ -x_1+2x_2-x_3-x_4-x_5&=0,\\ 4x_1+x_2-5x_3-5x_4-5x_5&=0,\\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5&=0,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.24.
$$\begin{aligned}3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5&=0,\\ 6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5&=0,\\ 9x_1\qquad+3x_3+2x_4+3x_5&=0,\\ 12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.25.
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+2x_4-6x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2+7x_3+6x_4-18x_5&=0,\\ 3x_1+5x_2+11x_3+9x_4-27x_5&=0,\\ 2x_1-7x_2+7x_3+16x_4-48x_5&=0,\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-6x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.26. Vérifier si le système
$$\begin{aligned}2x_1+4x_2+6x_3+5x_4+3x_5&=0,\\ 5x_1+6x_2+7x_3+9x_4+6x_5&=0,\\ 4x_1+6x_2+8x_3+7x_4+5x_5&=0,\\ 5x_1+5x_2+5x_3+8x_4+6x_5&=0,\\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+4x_5&=0\end{aligned}$$
possède un nombre infini de solutions, chacune de ses solutions donnant

lieu à $x_4=x_5=0$. Expliquer ces faits en termes de la dépendance et de l'indépendance linéaires des colonnes de la matrice du système.

4.4.27. Indiquer tous les groupes des inconnues qui peuvent être considérées comme des inconnues non principales du système :

$$\begin{aligned}7x_1-4x_2+9x_3+2x_4+2x_5&=0,\\5x_1+8x_2+7x_3-4x_4+2x_5&=0,\\3x_1-8x_2+5x_3+4x_4+2x_5&=0,\\7x_1-2x_2+2x_3+x_4-5x_5&=0.\end{aligned}$$

4.4.28. Déterminer dans l'espace des polynômes de degré $\leq n$ la dimension du sous-espace des polynômes $f(t)$ qui vérifient les conditions $f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_k)=0$, où $a_1, \ldots, a_k$ sont des nombres distincts.

4.4.29. Trouver dans l'espace des polynômes de degré ≤ 5 la base du sous-espace vectoriel des polynômes $f(t)$ tels qu'ils satisfassent aux conditions $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$.

4.4.30. Trouver le système homogène d'équations linéaires composé a) de deux équations; b) de trois équations; c) de quatre équations, tel que le système de vecteurs

$$\begin{aligned}y_1&=(1, 4, -2, 2, -1),\\y_2&=(3, 13, -1, 2, 1),\\y_3&=(2, 7, -8, 4, -5)\end{aligned}$$

soit le système fondamental de solutions.

4.4.31. Peut-on trouver un système d'équations linéaires tel que les systèmes de vecteurs

$$\begin{aligned}y_1&=(2, 3, 1, 2),\\y_2&=(1, 1, -2, -2),\\y_3&=(3, 4, 2, 1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}z_1&=(1, 0, 2, -5),\\z_2&=(0, 1, 8, 7),\\z_3&=(4, 5, -2, 0)\end{aligned}$$

soient deux systèmes fondamentaux de solutions?

4.4.32*. Le rang d'un système homogène d'équations linéaires composé de $n-1$ équations à n inconnues est $n-1$. Démontrer qu'une solution non nulle de ce système peut se construire d'après les formules

$$x_i=(-1)^i A_i, \quad i=1, \ldots, n,$$

où A_i est le mineur obtenu par l'élimination de la matrice des coefficients du système de la i-ième colonne. Montrer également que tout autre solution du système est colinéaire à la solution considérée.

4.4.33. En appliquant le résultat du problème 4.4.32, trouver le vecteur orthogonal au système de vecteurs

$$z_1=(2, -1, 3, 1),$$
$$z_2=(1, 0, 2, -3),$$
$$z_3=(2, 3, 1, 4).$$

4.4.34*. Démontrer le théorème : pour que deux systèmes linéairement indépendants de vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et $y_1, \ldots, y_{n-1}$ d'un espace vectoriel de dimension n soient équivalents, il faut et il suffit que, quelle que soit la base de cet espace, tous les n mineurs d'ordre $n-1$ composés de coordonnées des vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ soient proportionnels aux mineurs correspondants composés de coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

4.4.35. Appliquer le résultat du problème 4.4.34 pour dire si les systèmes de vecteurs du problème 4.4.31 sont équivalents.

§ 4.5. Systèmes non homogènes d'équations linéaires

Présentation des problèmes du paragraphe. Voici les questions principales examinées dans ce qui suit.

Critères de compatibilité des systèmes non homogènes, discussion de la compatibilité des systèmes concrets.

Recherche de la solution générale d'un système. Outre les problèmes consacrés strictement au calcul nous donnons également des problèmes relatifs à la détermination de la solution générale. De même que dans le cas homogène, nous insistons sur le fait que les formules de la solution générale donnent au fond les équations paramétriques du plan des solutions du système d'équations linéaires donné (cf. problème 4.5.9). Remarquons que dans les problèmes de calcul nous décrivons également certaines méthodes utilisées dans des calculs pratiques, telles le changement de numérotation et l'équilibrage des équations et des inconnues, l'utilisation du caractère particulier d'un système, par exemple, de la propriété de se décomposer en plusieurs systèmes de plus petit ordre, ou de la forme tridiagonale de la matrice de ses coefficients.

A titre de conclusion nous donnons plusieurs problèmes sur des systèmes d'équations linéaires. En particulier, nous indiquons certaines applications des formules de Cramer.

4.5.1. Démontrer que le système non homogène de m équations linéaires dont la matrice des coefficients affectés aux inconnues est de rang m, est compatible.

4.5.2. Démontrer que pour que le système

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

soit compatible, il faut et il suffit que le vecteur

$$b=(b_1\, b_2, \ldots, b_m)$$

appartienne à l'enveloppe linéaire des vecteurs

$$a_1=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),$$
$$a_2=(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}).$$

4.5.3. Démontrer le *théorème de Fredholm :* pour qu'un système non homogène (4.5.1) soit compatible, il faut et il suffit que le vecteur de dimension m

$$b=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

soit orthogonal à toutes les solutions du système homogène adjoint

$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m=0,$$
$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m=0.$$

4.5.4. Un système non homogène de m équations à n inconnues est compatible et le rang de la matrice des coefficients affectés aux inconnues est r. Démontrer que l'ensemble des solutions de ce système est un plan de dimension $n-r$ dans un espace arithmétique de dimension n et dont le sous-espace directeur est l'ensemble des solutions du *système réduit* correspondant, c'est-à-dire du système homogène de même matrice des coefficients affectés aux inconnues.

4.5.5. Deux systèmes non homogènes d'équations linéaires

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$$

et

$$c_{11}x_1+\ldots c_{1n}x_n=d_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{l1}x_1+\ldots+c_{ln}x_n=d_l$$

sont dits *équivalents* s'ils sont tous les deux incompatibles ou compatibles et s'ils possèdent le même ensemble des solutions. Démontrer que si les systèmes concernés sont compatibles, ils sont équivalents si et seulement si les systèmes de vecteurs

$$u_1=(a_{11}, \ldots, a_{1n}, b_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m=(a_{m1}, \ldots, a_{mn}, b_m)$$

et

$$v_1=(c_{11}, \ldots, c_{1n}, d_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_l=(c_{l1}, \ldots\ c_{ln}, d_l)$$

sont équivalents.

Discuter la compatibilité du système et indiquer la dimension du plan des solutions en fonction de la valeur du paramètre λ :

4.5.6.
$$\begin{aligned}(5-\lambda)x_1-2x_2-x_3&=1,\\ -2x_1+(2-\lambda)x_2-2x_3&=2,\\ -x_1-2x_2+(5-\lambda)x_3&=1.\end{aligned}$$

4.5.7.
$$\begin{aligned}-x_1+(1+\lambda)x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4&=3,\\ \lambda x_1-\quad x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4&=2,\\ \lambda x_1+\quad \lambda x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4&=2,\\ \lambda x_1+\quad \lambda x_2+(2-\lambda)x_3-x_4&=2.\end{aligned}$$

Dans les problèmes 4.5.8-4.5.11 on considère le système compatible non homogène d'équations (4.5.1) de rang r. On suppose que les équations et les inconnues soient numérotées de façon que les mineurs d'ordre 1, 2, ..., r des premières lignes et colonnes de la matrice du système soient différents de zéro.

4.5.8. En appliquant la méthode d'élimination des inconnues montrer qu'à partir du système (4.5.1) on peut trouver l'expression des inconnues $x_1, \ldots, x_r$ par les inconnues non principales $x_{r+1}, \ldots, x_n$ de la forme suivante

$$\begin{aligned}x_1&=c_{10}+c_{11}x_{r+1}+c_{12}x_{r+2}+\ldots+c_{1,n-r}x_n,\\ x_2&=c_{20}+c_{21}x_{r+1}+c_{22}x_{r+2}+\ldots+c_{2,n-r}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r&=c_{r0}+c_{r1}x_{r+1}+c_{r2}x_{r+2}+\ldots+c_{r,n-r}x_n.\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Ces formules s'appellent *solution générale* du système (4.5.1). Les formules (4.4.3) sont un cas particulier des formules (4.5.2).

4.5.9. Montrer que le vecteur

$$x_0=(c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{r0}, 0, 0, \ldots, 0)$$

est une solution du système (4.5.1), et les vecteurs

$$\begin{aligned}y_1&=(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{r1}, 1, 0, \ldots, 0),\\ y_2&=(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{r2}, 0, 1, \ldots, 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{n-r}&=(c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \ldots, c_{r,n-r}, 0, 0, \ldots, 1)\end{aligned}$$

forment un système fondamental de solutions du système réduit correspondant.

En complétant les formules (4.5.2) par les identités

$$\begin{aligned}x_{r+1}&=x_{r+1},\\ x_{r+2}&=x_{r+2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=x_n,\end{aligned}$$

interpréter les relations obtenues comme des équations paramétriques du plan des solutions du système (4.5.1).

4.5.10. Démontrer que le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} \dots c_{1,n-r} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \dots c_{2,n-r} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r0} & c_{r1} & c_{r2} \dots c_{r,n-r} \end{Vmatrix},$$

composée des coefficients des formules (4.5.2) est égal au rang de la sous-matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

de la matrice complète du système (4.5.1).

4.5.11. Démontrer que le vecteur

$$z_i=(c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{ri}), \quad i=1, \dots, n-r,$$

est la solution du système d'équations

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=-a_{1i}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=-a_{ri}, \end{gathered}$$

et le vecteur

$$z_0=(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{r0})$$

est la solution du système d'équations

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=b_r. \end{gathered}$$

Discuter la compatibilité et trouver la solution générale des systèmes d'équations :

4.5.12.
$$\begin{aligned} 38x_1-74x_2+46x_3+84x_4&=90, \\ -95x_1+185x_2-115x_3+210x_4&=-225, \\ 57x_1-111x_2+69x_3+126x_4&=135. \end{aligned}$$

4.5.13.
$$\begin{aligned} 105x_1-175x_2-315x_3+245x_4&=84, \\ 90x_1-150x_2-270x_3+210x_4&=72, \\ 75x_1-125x_2-225x_3+175x_4&=59. \end{aligned}$$

4.5.14.
$$\begin{aligned} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4&=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4&=-3, \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4&=1, \\ -x_1+x_3+2x_4&=1, \\ -x_2+x_3+2x_4&=3. \end{aligned}$$

4.5.15.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4&=0,\\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4&=-2,\\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4&=5. \end{aligned}$$

4.5.16.
$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=4,\\ x_2+x_3+x_4&=-3,\\ x_3+x_4+x_5&=2,\\ x_4+x_5&=-1. \end{aligned}$$

4.5.17.
$$\begin{aligned} 12x_1-18x_2+102x_3-174x_4-216x_5&=132,\\ 14x_1-21x_2+119x_3-203x_4-252x_5&=154,\\ x_3+2x_4+3x_5&=-1,\\ 4x_3+5x_4+6x_5&=-2,\\ 7x_3+8x_4+9x_5&=-3. \end{aligned}$$

4.5.18.
$$\begin{aligned} 24x_1+9x_2+33x_3-15x_4&=21,\\ 8x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=7,\\ 40x_1+15x_2+55x_3-25x_4+213x_5&=35,\\ 56x_1+21x_2+77x_3-35x_4+197x_5&=49. \end{aligned}$$

4.5.19*.
$$\begin{aligned} 2000x_1+0{,}003x_2-0{,}3x_3+40x_4&=5,\\ 3000x_1+0{,}005x_2-0{,}4x_3+90x_4&=8,\\ 500x_1+0{,}0007x_2-0{,}08x_3+8x_4&=1{,}3,\\ 60000x_1+0{,}09x_2-9x_3+1300x_4&=190. \end{aligned}$$

4.5.20.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-5x_3+4x_4+x_5&=4,\\ 3x_1+7x_2-x_3-3x_4+2x_5&=10,\\ -x_2-13x_3-2x_4+x_5&=-14,\\ x_3-16x_4+2x_5&=-11,\\ 2x_4+5x_5&=12. \end{aligned}$$

4.5.21.
$$\begin{aligned} 8x_1+12x_2&=20,\\ 14x_1+21x_2&+35,\\ 9x_3+11x_4&=0,\\ 16x_3+20x_4&=0,\\ 10x_5+12x_6&=22,\\ 15x_5+18x_6&=33. \end{aligned}$$

4.5.22.
$$\begin{aligned} x_1-5x_3+2x_6&=6,\\ 2x_2+x_4+3x_5&=6,\\ 2x_1-7x_3+3x_6&=4,\\ 3x_2+2x_4+4x_5&=7,\\ 2x_1-x_3+x_6&=-12,\\ 4x_2+3x_4+5x_5&=9. \end{aligned}$$

Discuter le système et chercher la solution générale en fonction de la valeur du paramètre λ :

4.5.23.
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=-1,\\ 7x_1+6x_2+5x_3&=\lambda,\\ 5x_1+4x_2+3x_3&=2. \end{aligned}$$

4.5.24.
$$\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3&=0,\\ 5x_1+x_2-2x_3&=2,\\ -2x_1-2x_2+x_3&=-3. \end{aligned}$$

4.5.25.
$$\begin{aligned} 24x_1-38x_2+46x_3&=26,\\ 60x_1+\lambda x_2+115x_3&=65,\\ 84x_1-133x_2+161x_3&=91. \end{aligned}$$

4.5.26.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+\lambda x_3&=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3&=1,\\ \lambda x_1+x_2+x_3&=1. \end{aligned}$$

4.5.27. $$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\lambda x_3&=2,\\ x_1+\lambda x_2+\ x_3&=-1,\\ \lambda x_1+\ x_2+\ x_3&=-1.\end{aligned}$$

4.5.28. $$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\lambda x_3&=3,\\ x_1+\lambda x_2+\ x_3&=0,\\ \lambda x_1+\ x_2+\ x_3&=0.\end{aligned}$$

4.5.29. $$\begin{aligned} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+\qquad x_3&=\lambda,\\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+\qquad x_3&=1,\\ x_1+\qquad x_2+(2-\lambda)x_3&=1.\end{aligned}$$

4.5.30. $$\begin{aligned} (3+2\lambda)x_1+(1+3\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4&=3,\\ 3\lambda\, x_1+(3+2\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4&=1,\\ 3\lambda\, x_1+\ 3\lambda x_2\quad +3x_3+(\lambda-1)x_4&=1,\\ 3\lambda\, x_1+\ 3\lambda x_2\quad +\lambda x_3+(\lambda-1)x_4&=1.\end{aligned}$$

4.5.31. Vérifier si dans toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+\ x_3\qquad +x_5&=6,\\ x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4\qquad&=5,\\ -x_1+\ x_2+3x_3+5x_4+\ x_5&=8,\\ 2x_1-\ x_2+\ x_3-8x_4+2x_5&=-6\end{aligned}$$

les valeurs des inconnues x_3 et x_5 sont constantes et égales à 1 et 0 respectivement. Expliquer ces faits dans la terminologie de l'indépendance linéaire des colonnes de la matrice complète du système.

4.5.32. Les formules

$$\begin{aligned} x_1&=\ x_5+2x_6+3x_7+4x_8,\\ x_2&=2x_5+3x_6+\ x_7+2x_8,\\ x_3&=\ x_5+\ x_6+\ x_7-\ x_8,\\ x_4&=\ x_5\qquad -2x_7-6x_8\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_5&=\ 21x_1-6x_2-26x_3+17x_4,\\ x_6&=-17x_1+5x_2+20x_3-13x_4,\\ x_7&=-\ \ x_1\qquad +\ 2x_3-\ \ x_4,\\ x_8&=\ \ 4x_1-\ x_2-\ 5x_3+\ 3x_4\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

peuvent-elles décrire la solution générale d'un même système d'équations linéaires à 8 inconnues?

4.5.33. Remplacer dans les formules (4.5.3) du problème 4.5.32 la première relation par

$$x_5=22x_1-6x_2-26x_3+17x_4$$

et répondre encore à la question du problème.

4.5.34. Démontrer que l'ensemble des polynômes $f(t)$ du degré $\leq n$ vérifiant les conditions $f(a_1)=b_1,\ f(a_2)=b_2,\ \ldots, f(a_k)=b_k$ (où $k\leq n+1$ et $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ sont des nombres arbitraires, de plus, tous les a_i, $1\leq i\leq k$, sont distincts), n'est pas vide et représente un plan. Déterminer la dimension de ce plan.

4.5.35. Trouver trois polynômes $f(t)$ linéairement indépendants de degré ≤ 5 vérifiant les conditions $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=-5$, $f(3)=-20$.

4.5.36*. Vérifier si le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-2x_4&=-2,\\ 8x_1+7x_2+7x_3-9x_4&=3,\\ 6x_1+5x_2+5x_3-5x_4&=7 \end{aligned}$$

est compatible et trouver la solution normale de ce système.

4.5.37. Démontrer que pour qu'un système non homogène au nombre d'équations égal à celui d'inconnues soit compatible, il suffit que le système homogène réduit ait une solution unique.

4.5.38. Dans le système composé de n équations linéaires à n inconnues les colonnes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de la matrice des coefficients forment un système orthonormé. Démontrer que ce système est défini et que sa solution peut se calculer d'après les formules

$$x_i=(b, q_i), \quad i=1, \ldots, n.$$

Ici b est un vecteur de dimension n composé de seconds membres du système, et le produit scalaire se calcule d'après la règle usuelle de l'espace arithmétique.

4.5.39. Démontrer que la proposition du problème 4.5.38 est vraie également pour un système compatible au nombre d'équations différent de celui d'inconnues (on conserve la condition des colonnes orthonormales).

4.5.40. En utilisant le résultat du problème 4.5.38 résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4&=p,\\ -bx_1+ax_2+dx_3-cx_4&=q,\\ -cx_1-dx_2+ax_3+bx_4&=r,\\ -dx_1+cx_2-bx_3+ax_4&=s, \end{aligned}$$

dans l'hypothèse que $A=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$.

4.5.41. Déduire du résultat du problème 4.5.34 que si les valeurs de deux polynômes $f(t)$ et $g(t)$ de degré $\leq n$ coïncident pour plus de n valeurs distinctes de l'argument, alors ces polynômes sont égaux (c'est-à-dire les coefficients de même indice des polynômes coïncident). En déduire que la définition adoptée de l'égalité des polynômes est équivalente à leur égalité en tant que fonctions (c'est-à-dire à la coïncidence des valeurs quelles que soient les valeurs de l'inconnue).

4.5.42. Trouver le polynôme $f(t)$ du troisième degré tel que $f(1)=-2$, $f(2)=-4$, $f(3)=-2$, $f(4)=10$.

4.5.43. Trouver le polynôme $f(t)$ de degré ≤ 4 tel que $f(-2)=10$, $f(1)=4$, $f(-3)=60$, $f(2)=-10$, $f(-1)=-4$.

4.5.44*. Démontrer que le polynôme $f(t)$ de degré $\leq 2k$ vérifiant les conditions $f(a_i)=f(-a_i)$, $i=1, \ldots, k$, où $a_1^2, \ldots, a_k^2$ sont des nombres non nuls distincts, est strictement pair, c'est-à-dire que l'égalité $f(-t)=f(t)$ est vraie.

4.5.45. Démontrer que le polynôme $f(t)$ de degré $\leq 2k-1$ vérifiant les conditions $f(a_i)=-f(-a_i)$, $i=1, \ldots, k$, où $a_1^2, \ldots, a_k^2$ sont des nombres non nuls distincts, est strictement impair, c'est-à-dire que l'égalité $f(-t)= =-f(t)$ est vraie.

4.5.46. Démontrer que quels que soient les nombres $a, b_0, b_1, \ldots, b_n$, il existe un polynôme $f(t)$ et un seul de degré $\leq n$ tel que $f(a)=b_0, f'(a)= =b_1, \ldots, f^{(n)}(a)=b_n$.

4.5.47. Trouver le polynôme $f(t)$ de degré ≤ 4 tel que $f(2)=5, f'(2)=19, f^{(2)}(2)=40, f^{(3)}(2)=48, f^{(4)}(2)=24$.

4.5.48*. Démontrer que quels que soient les nombres $a_1, a_2, b_0, b_1, \ldots \ldots, b_{n-1}, c_0 (a_1 \neq a_2)$, il existe un polynôme $f(t)$ et un seul de degré $\leq n$ tel que $f(a_1)=b_0, f'(a_1)=b_1, \ldots, f^{n-1}(a_1)=b_{n-1}, f(a_2)=c_0$.

4.5.49. Trouver le polynôme $f(t)$ de degré ≤ 4 tel que $f(1)=-3, f'(1)= =-3, f^{(2)}(1)=12, f^{(3)}(1)=42, f(-1)=3$.

4.5.50*. Démontrer que quels que soient les nombres $a_1, a_2, b_0, b_1, \ldots \ldots, b_k, c_0, c_1, \ldots, c_l$ $(a_1 \neq a_2; k+l=n-1)$, il existe un polynôme et un seul de degré $\leq n$ vérifiant les conditions $f(a_1)=b_0, f'(a_1)=b_1, \ldots, f^{(k)}(a_1)=b_k, f(a_2)=c_0, f'(a_2)=c_1, \ldots, f^{(l)}(a_2)=c_l$.

4.5.51. Trouver le polynôme $f(t)$ de degré ≤ 5 tel que $f(1)=-2, f'(1)= =-7, f^{(2)}(1)=-14, f^{(3)}(1)=24, f(2)=-4, f'(2)=25$.

4.5.52. Les seconds membres b_i d'un certain système de n équations linéaires à n inconnues sont les fonctions dérivables de la variable t; les coefficients a_{ij} des inconnues sont des nombres constants. Démontrer que les composantes $x_1, \ldots, x_n$ de la solution sont également des fonctions dérivables de t; de plus,

$$x_i'(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots b_1'(t) \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots b_n'(t) \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{ni} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad i=1, \ldots, n.$$

4.5.53*. En utilisant les formules de Cramer déduire pour la n-ième fonction dérivable

$$f(t)=\frac{g(t)}{h(t)}$$

la relation :

$$f^{(n)}(t)=\frac{1}{h^{(n+1)}(t)}\begin{vmatrix} h(t) & 0 & 0 & \ldots & g(t) \\ h'(t) & h(t) & 0 & \ldots & g'(t) \\ h^{(2)}(t) & 2h'(t) & h(t) & \ldots & g^{(2)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^{(n)}(t) & C_n^1 h^{(n-1)}(t) & C_n^2 h^{(n-2)}(t) & \ldots & g^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

4.5.54. Trouver la valeur de la dérivée cinquième de la fonction

$$f(t)=\frac{(t-1)^5}{37t^6-61t^5+13t^3-74t+25}$$

pour $t=1$.

4.5.55. Démontrer que les solutions $x_1, \ldots, x_k$ de certains systèmes d'équations linéaires de même matrice des coefficients affectés aux inconnues et aux seconds membres $b_1, \ldots, b_k$ respectivement, sont linéairement dépendants si et seulement si les seconds membres sont dépendants.

CHAPITRE 5

OPÉRATEURS LINÉAIRES ET MATRICES

§ 5.0. Terminologie et généralités

Supposons donnés deux espaces vectoriels X et Y, tous les deux réels et tous les deux complexes. On appelle *opérateur linéaire* A de X dans Y la correspondance entre les éléments de ces espaces qui à tout vecteur $x \in X$ associe un vecteur bien défini $y \in Y$, appelé image du vecteur x et noté Ax; de plus,

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,$$

quels que soient les vecteurs x_1 et x_2 et les nombres α et β. Comme dans ce qui suit nous n'examinons que des opérateurs linéaires, nous omettrons parfois le terme « linéaire » dans la dénomination de l'opérateur.

L'ensemble des vecteurs Ax, $x \in X$, s'appelle *domaine des valeurs* ou *image* de l'opérateur A, noté T_A. L'ensemble des vecteurs x tels que $Ax=0$ s'appelle *noyau* de l'opérateur A, noté N_A. L'image et le noyau d'un opérateur linéaire sont des sous-espaces linéaires (cf. § 5.1); en outre, la dimension du sous-espace T_A se note r_A et s'appelle *rang* de l'opérateur A; la dimension du sous-espace N_A désignée n_A s'appelle *défaut* de l'opérateur A.

Désignons par ω_{XY} l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y. On peut définir sur l'ensemble ω_{XY} la structure de l'espace vectoriel. Plus précisément, posons

1. $(A+B)x=Ax+Bx$;
2. $(\lambda A)x=\lambda(Ax)$;

ici x est un vecteur arbitraire de X. Les opérateurs $A+B$ et λA définis par ces relations s'appellent respectivement *somme des opérateurs A* et *B* et *produit d'un opérateur A par un nombre λ*. Le zéro de l'espace vectoriel ω_{XY} sera *l'opérateur nul* de X dans Y, c'est-à-dire l'opérateur qui à tout vecteur de X fait correspondre le zéro de l'espace Y.

Soient maintenant $A \in \omega_{XY}$, $B \in \omega_{YZ}$. On appelle *produit d'un opérateur B par un opérateur A* l'opérateur $C=BA$ de X dans Z défini par la relation

$$Cx=B(Ax).$$

Pour que le produit BA ait un sens, il faut et il suffit que l'image de l'opérateur A appartienne au domaine de définition de l'opérateur B. Cette condition est bien remplie si l'on considère les opérateurs de ω_{XX}. Quel que soit un tel opérateur A, nous dirons qu'il agit dans l'espace X.

Pour un opérateur A de ω_{XX} une puissance naturelle A^k peut être définie comme le produit de k opérateurs égaux à A. Pour tout opérateur A on pose par définition

$$A^0=E,$$

où E est un *opérateur identique* ou *opérateur unité* (c'est-à-dire un opérateur qui à tout $x\in X$ fait correspondre ce même vecteur x). Si

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_kt^k$$

est un polynôme quelconque, on appelle alors polynôme $f(A)$ de A l'opérateur

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_kA^k.$$

L'opérateur A qui agit dans un espace X de dimension n est dit *non dégénéré* si le défaut de cet opérateur est nul ou, ce qui revient au même, si son rang est égal à n. Pour un opérateur A non dégénéré il existe un opérateur linéaire B et un seul tel que

$$AB=BA=E.$$

L'opérateur B est dit *inverse* de l'opérateur A et on le note A^{-1}.

L'opérateur inverse permet de calculer les puissances négatives entières d'un opérateur A non dégénéré. Plus précisément, si k est un nombre naturel, on admet que

$$A^{-k}=(A^{-1})^k,$$

ou, ce qui revient au même,

$$A^{-k}=(A^k)^{-1}.$$

On appelle *somme des matrices A et B de type $m\times n$* la matrice $C=A+B$ de type $m\times n$ telle que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=1,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

On appelle *produit d'une matrice A de type $m\times n$ par un nombre λ* la matrice $D=\lambda A$ de type $m\times n$ telle que

$$d_{ij}=\lambda a_{ij},\quad i=1,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Une *matrice unité* (cf. § 3.0) de même qu'un opérateur identique est notée E. S'il faut expliciter le type n d'une matrice unité, on recourt à l'écriture E_n. Les matrices de la forme λE sont dites *scalaires*.

On appelle *produit BA* de la matrice B de type $p\times m$ par la matrice A de type $m\times n$ la matrice C de type $p\times n$ telle que

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj},\quad i=1,\ \ldots,\ p,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Pour que le produit BA ait un sens il faut et il suffit que le nombre de colonnes de la matrice B soit égal au nombre de lignes de la matrice A. Cette condition est bien remplie si les deux matrices sont des matrices carrées de même ordre.

Pour une matrice A *non dégénérée* (c'est-à-dire une matrice carrée dont le déterminant n'est pas nul; cf. § 3.0) il existe une seule matrice inverse A^{-1} qui vérifie les égalités

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Si l'on pose $B=A^{-1}$, les éléments b_{ij} de la matrice B peuvent se calculer d'après les formules

$$b_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A}\,; \tag{5.0.1}$$

où A_{ji} est le cofacteur de l'élément a_{ji}.

Si la matrice carrée C d'ordre $n\times n$ est le produit de deux matrices rectangulaires A et B de types $n\times m$ et $m\times n$ respectivement, et si $m\geq n$, le déterminant de la matrice C vérifie la *formule de Binet-Cauchy*

$$\det C=\sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_n\leq m} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \ldots & k_n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}. \tag{5.0.2}$$

En particulier, si A et B sont carrées elles aussi, il vient

$$\det AB=\det A\cdot\det B. \tag{5.0.3}$$

Soient A un opérateur de ω_{XY} et $e_1, \ldots, e_n$ et $q_1, \ldots, q_m$ les bases fixées de l'espace X et de l'espace Y respectivement. Décomposons les vecteurs $Ae_1, \ldots, Ae_n$ suivant la base $q_1, \ldots, q_m$:

$$\begin{aligned}
Ae_1&=a_{11}q_1+a_{21}q_2+\ldots+a_{m1}q_m,\\
Ae_2&=a_{12}q_1+a_{22}q_2+\ldots+a_{m2}q_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Ae_n&=a_{1n}q_1+a_{2n}q_2+\ldots+a_{mn}q_m.
\end{aligned}$$

Construisons à partir des coefficients de ces décompositions la matrice $m\times n$

$$A_{qe}=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{Vmatrix}. \tag{5.0.4}$$

On dit que A_{qe} est une *matrice de l'opérateur A dans le couple de bases* $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ et $q_1, \ldots, q_m$, ou que *dans ce couple de bases*, A_{qe} *définit l'opérateur A*.

Appelons une matrice $m\times 1$ *vecteur colonne* de dimension m et une matrice $1\times n$ *vecteur ligne* de dimension n. A chaque vecteur $x\in X$ associons un vecteur colonne x_e de dimension n composé de coordonnées de ce vecteur dans la base $e_1, \ldots, e_n$. D'une façon analogue, à tout vecteur $y\in Y$ associons un vecteur colonne y_q de dimension m composé de coordonnées de ce vecteur dans la base $q_1, \ldots, q_m$. La relation entre les coordonnées du vecteur x et du vecteur $y=Ax$ peut s'écrire alors sous la forme matricielle

$$y_q=A_{qe}x_e. \tag{5.0.5}$$

Pour décrire un opérateur A de ω_{XX} il suffit de fixer une base $e_1, \ldots, e_n$. Les vecteurs $Ae_1, \ldots, Ae_n$ doivent être décomposés suivant cette base. La matrice établie à partir des coefficients des décompositions est notée A_e; elle s'appelle *matrice de l'opérateur A dans la base $e_1, \ldots, e_n$*. On dit aussi que *A_e définit l'opérateur A dans cette base*. La formule (5.0.5) devient

$$y_e = A_e x_e. \tag{5.0.6}$$

Soient dans un espace X deux bases fixées $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$. Décomposons les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ suivant la base $e_1, \ldots, e_n$:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Utilisons les coefficients de ces décompositions pour construire la matrice

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{5.0.7}$$

La matrice P s'appelle *matrice de passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ à la base $f_1, \ldots, f_n$*. Si x_e et x_f sont les colonnes des coordonnées du vecteur x dans les bases considérées, la relation entre ces colonnes est donnée par l'égalité

$$x_e = Px_f. \tag{5.0.8}$$

La matrice de passage permet également d'écrire la relation entre les matrices A_e et A_f d'un opérateur A qui agit dans l'espace X :

$$A_f = P^{-1}A_eP. \tag{5.0.9}$$

Si $A \in \omega_{XY}$ et si dans les espaces X et Y on a fixé deux bases dans chacun : $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_n$ et $q_1, \ldots, q_m$; $t_1, \ldots, t_m$ respectivement, alors les matrices A_{qe} et A_{tf} sont associées par la relation

$$A_{tf} = Q^{-1}A_{qe}P, \tag{5.0.10}$$

où P est la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_n$ à $f_1, \ldots, f_n$, et Q la matrice de passage de $q_1, \ldots, q_m$ à $t_1, \ldots, t_m$.

Si les éléments d'un espace arithmétique sont notés sous la forme de vecteurs colonnes, la formule (5.0.5) permet de rendre identiques les opérateurs de R_n dans R_m (ou de C_n dans C_m) à matrices $m \times n$ réelles ou complexes respectivement (cf. pour plus de détails le problème (5.6.7)). Compte tenu de cette remarque, nous traitons dans ce qui suit de l'image d'une matrice, de son noyau, etc.

§ 5.1. Définition de l'opérateur linéaire; image et noyau d'un opérateur

Présentation des problèmes du paragraphe. Outre des exemples d'opérateurs dans des espaces vectoriels concrets, nous donnons plusieurs problèmes relatifs à la définition de l'opérateur linéaire. L'attention est portée surtout sur la façon suivant laquelle un opérateur linéaire intervient dans les relations principales d'un espace vectoriel (telles la dépendance linéaire, l'équivalence des systèmes de vecteurs, la somme des sous-espaces, etc.).

A la fin du paragraphe nous examinons les notions importantes du noyau et de l'image d'un opérateur linéaire.

Déterminer si chacun des opérateurs ci-dessous d'un espace euclidien tridimensionnel des vecteurs géométriques est linéaire. Tous les opérateurs sont décrits par leur action sur un vecteur arbitraire x. De plus, a et b désignent les vecteurs fixés de l'espace, α le nombre fixé.

5.1.1. $Ax=a$. **5.1.2.** $Ax=x+a$. **5.1.3.** $Ax=\alpha x$.

5.1.4. $Ax=(x, a)a$. **5.1.5.** $Ax=(a, x)b$.

5.1.6. $Ax=(a, x)x$. **5.1.7.** $Ax=[x, a]$.

5.1.8. $Ax=[a, [x, b]]$.

Etablir quelles sont parmi les applications de l'espace euclidien tridimensionnel des vecteurs géométriques dans l'ensemble des nombres réels indiquées ci-dessous, celles qui sont des opérateurs linéaires. Toutes les applications sont décrites par leur action sur un vecteur arbitraire x; a et b sont des vecteurs fixés de l'espace, α le nombre fixé.

5.1.9. $f(x)=\alpha$. **5.1.10.** $f(x)=(x, a)$.

5.1.11. $f(x)=\cos(x, a)$. **5.1.12.** $f(x)=(x, x)$.

5.1.13. $f(x)=([a, x], b)$. **5.1.14.** $f(x)=(x, [a, x])$.

Etablir quelles sont parmi les transformations de l'espace arithmétique tridimensionnel qui suivent celles qui sont linéaires. Chaque transformation est décrite par son action sur un vecteur arbitraire x; de plus, les composantes du vecteur image sont données comme des fonctions des composantes du vecteur x.

5.1.15. $Ax=(x_1, x_2, x_3^2)$. **5.1.16.** $Ax=(x_3, x_1, x_2)$.

5.1.17. $Ax=(x_3, x_1, x_2-1)$.

5.1.18. $Ax=(x_1+2x_2-3x_3, 3x_1-x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+2x_3)$.

Trouver parmi les transformations ci-dessous de l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ de la variable réelle t celles qui sont des opérateurs linéaires sur cet espace. Chaque transformation est décrite par son action sur un polynôme arbitraire $f(t)$.

5.1.19. $Af(t)=f(-t)$. **5.1.20.** $Af(t)=f(t+1)$.

5.1.21. $Af(t)=f(at+b)$, où a et b sont des nombres fixés; de plus, $a\neq 0$.

5.1.22. $Af(t)=f'(t)$. Dans ce qui suit cet opérateur s'appelle *opérateur de dérivation*.

5.1.23. $Af(t)=f^{(k)}(t)$. Dans ce qui suit cet opérateur s'appelle *opérateur de dérivation k-tuple*.

5.1.24. $Af(t)=f(t+1)-f(t)$.

5.1.25. $Af(t)=f(t+1)-g(t)$, où $g(t)$ est le polynôme non nul fixé.

5.1.26. $Af(t)=tf(t)$. **5.1.27.** $Af(t)=f(t^2)$.

5.1.28. Montrer que a) la transformation du problème 5.1.22 peut être considérée comme un opérateur linéaire de M_n dans M_{n-1}; b) la transformation du problème 5.1.26 est un opérateur de M_n dans M_{n+1}; c) la transformation du problème 5.1.27 est un opérateur linéaire de M_n dans M_{2n}.

5.1.29. L'espace vectoriel X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. Démontrer que l'opérateur P qui associe à chaque vecteur x de l'espace X à décomposition

$$x=x_1+x_2,$$

où $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, le vecteur x_1 de cette décomposition, est un opérateur linéaire. L'opérateur P s'appelle *opérateur de projection de l'espace X sur L_1 parallèlement à L_2*.

5.1.30. L'espace vectoriel X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. Démontrer que l'opérateur R qui à chaque vecteur x de l'espace X à décomposition

$$x=x_1+x_2,$$

où $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ fait correspondre le vecteur $y=x_1-x_2$, est un opérateur linéaire. L'opérateur R s'appelle *application de l'espace X dans L_1 parallèlement à L_2*.

5.1.31. Etablir le sens géométrique de l'application orthogonale d'un espace euclidien tridimensionnel dans un sous-espace bidimensionnel L.

5.1.32. Une base $e_1, \ldots, e_n$ est fixée dans un espace vectoriel X. Démontrer que la correspondance qui associe à chaque vecteur x de l'espace sa i-ième coordonnée dans cette base est un opérateur linéaire de X dans un espace des nombres réels ou complexes. L'opérateur linéaire qui applique l'espace X dans le corps numérique correspondant s'appelle *fonctionnelle linéaire de X*.

5.1.33. Démontrer que tout opérateur linéaire qui agit dans un espace unidimensionnel se ramène à la multiplication de tous les vecteurs de l'espace par un nombre fixé pour l'opérateur donné.

5.1.34. Décrire tous les opérateurs linéaires de l'espace R^+ (cf. problème 1.1.6).

5.1.35. Démontrer que tout opérateur linéaire transforme un système de vecteurs linéairement dépendants en un système de vecteurs linéairement dépendants.

5.1.36. La proposition : un système de vecteurs linéairement indépendant est associé par un opérateur linéaire encore à un système linéairement indépendant, est-elle vraie?

5.1.37. La proposition : si les systèmes de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots$ $\ldots, y_l$ sont équivalents, les systèmes de vecteurs $Ax_1, \ldots, Ax_k$ et $Ay_1 \ldots, Ay_l$ sont équivalents pour tout opérateur linéaire A, est-elle vraie?

5.1.38. Soient $A \in \omega_{XY}$ et L un sous-espace arbitraire d'un espace X. L'ensemble des vecteurs Ax, où $x \in L$, s'appelle *image du sous-espace L* notée AL. Démontrer que AL est un sous-espace de l'espace Y.

5.1.39. Démontrer que la dimension du sous-espace AL ne dépasse pas la dimension du sous-espace L.

5.1.40. Soient L la somme des sous-espaces L_1 et L_2, L_0 leur intersection. Est-il vrai que pour tout opérateur linéaire A :

a) $AL=AL_1+AL_2$;

b) $AL_0=AL_1\cap AL_2$?

5.1.41. Donner un exemple d'opérateur linéaire tel que la formule du problème 5.1.40, b) n'ait pas lieu.

5.1.42. Montrer que si l'on connaît les images $Ae_1, \ldots, Ae_n$ des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ qui constituent une base d'un espace X, l'action d'un opérateur linéaire A sur un vecteur quelconque de l'espace X est définie d'une façon unique.

5.1.43. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base d'un espace X, $y_1, \ldots, y_n$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace Y. Démontrer qu'il existe un opérateur A et un seul de ω_{XY} tel que $Ae_i=y_i$, $i=1, \ldots, n$.

5.1.44. Soient $x_1, \ldots, x_k$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace X; $y_1, \ldots, y_k$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace Y. La proposition : il existe un opérateur linéaire A de ω_{XY} qui transforme les vecteurs x_i en vecteurs y_i, $i=1, \ldots, k$, est-elle vraie?

5.1.45. Dans l'énoncé du problème 5.1.44 supposer encore que le système de vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ est linéairement indépendant. La proposition du problème sera-t-elle alors vraie?

5.1.46. Une base $e_1, \ldots, e_n$ a été fixée dans un espace X. Montrer que l'action d'une fonctionnelle linéaire f sur un vecteur arbitraire x de l'espace est décrite par la formule

$$f(x)=c_1\alpha_1+\ldots+c_n\alpha_n, \tag{5.1.1}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les coordonnées du vecteur x; $c_1, \ldots, c_n$ les images des vecteurs de base. Inversement, la formule (5.1.1) définit la fonctionnelle linéaire de X quels que soient les nombres $c_1, \ldots, c_n$.

5.1.47. Montrer que la formule

$$\varphi f(t)=f(a_0)$$

définit dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ une fonctionnelle linéaire φ. Ici f est un polynôme arbitraire de M_n; a_0 le nombre fixé. La réciproque : le choix du nombre a_0 étant convenable, toute fonctionnelle linéaire φ de M_n peut être donnée de cette façon, est-elle vraie?

5.1.48. Soient L un sous-espace d'un espace X; A un opérateur arbitraire de ω_{XY}. Montrer que l'action de l'opérateur A sur le sous-espace L peut être considérée comme a) un opérateur linéaire de L dans Y; b) un opérateur linéaire de L dans AL.

5.1.49. Soient L un sous-espace d'un espace X; A un opérateur linéaire de L dans un certain espace Y. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire de X dans Y dont l'action sur le sous-espace L coïncide avec celle de l'opérateur A.

5.1.50. Construire dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ deux opérateurs linéaires distincts qui coïncident sur le sous-espace M_{n-1} avec l'opérateur de dérivation.

5.1.51. Supposons que l'espace X soit somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_k$. Montrer que l'action d'un opérateur linéaire sur un vecteur quelconque de l'espace est définie d'une façon unique si l'on connaît l'action de cet opérateur sur chacun des sous-espaces $L_1, \ldots, L_k$.

5.1.52. Soient A un opérateur linéaire dans l'espace vectoriel réel R; C l'espace complexe obtenu de R par complexification (cf. problème 2.5.13). Définissons l'opérateur $\hat{A}$ dans C de la façon suivante : posons pour un vecteur arbitraire $z=x+iy$ de C, où $x, y \in R$,

$$\hat{A}z = Ax + iAy.$$

Montrer que l'opérateur $\hat{A}$ est un opérateur linéaire.

Est-ce qu'on peut obtenir de cette façon n'importe quel opérateur de l'espace C?

5.1.53. Est-ce qu'une fonctionnelle linéaire peut prendre sur un espace vectoriel complexe seulement des valeurs réelles?

5.1.54. Montrer que le noyau N_A d'un opérateur linéaire arbitraire A de ω_{XY} est un sous-espace d'un espace X.

5.1.55. Est-il vrai que tout sous-espace d'un espace X est un noyau d'un certain opérateur linéaire de X dans Y?

5.1.56. D'après le problème 5.1.38 l'image T_A d'un opérateur linéaire arbitraire A de ω_{XY} est un sous-espace d'un espace Y. Est-il vrai que tout sous-espace de l'espace Y est une image d'un certain opérateur linéaire de X dans Y?

5.1.57. Démontrer que l'ensemble des images d'un vecteur y de T_A est un plan de l'espace X à sous-espace directeur N_A.

5.1.58*. Construire pour un opérateur A de ω_{XY} la correspondance biunivoque entre T_A et les plans de l'espace X de la forme $P=x_0+N_A$.

5.1.59. D'après le problème 4.2.18, l'ensemble M des plans de l'espace X de la forme $P=x_0+N_A$ est un espace vectoriel. Démontrer que la correspondance entre les plans de M et les vecteurs de T_A établie dans le problème 5.1.58 est un opérateur linéaire (de M dans T_A). Trouver le noyau et le défaut de cet opérateur.

5.1.60*. Démontrer que pour tout opérateur A de ω_{XY} la somme du rang et du défaut est égale à la dimension de l'espace X.

5.1.61. Donner un exemple d'opérateur linéaire de ω_{XX} tel que l'espace X ne soit pas somme directe de l'image et du noyau de cet opérateur.

5.1.62. Soit M un espace quelconque supplémentaire du noyau N_A de l'opérateur A. Démontrer que :

a) tout système linéairement indépendant de vecteurs de M est transformé par l'opérateur A en un système linéairement indépendant (comparer cette proposition au problème 5.1.36);

b) le sous-espace M est appliqué par l'opérateur A d'une façon univoque sur son image T_A.

5.1.63. Démontrer que pour deux sous-espaces quelconques N dans un espace X de dimension n et T dans un espace Y, tels que $\dim N + \dim T = n$, il existe un opérateur linéaire A de ω_{XY} tel que son noyau coïncide avec N et son image avec T.

5.1.64. Construire dans l'espace M_n deux opérateurs linéaires distincts de mêmes image et noyau.

5.1.65. Soient A un opérateur de X dans Y; L le sous-espace vérifiant l'inclusion $L \subset T_A$. Démontrer qu'un ensemble des vecteurs x de X dont les images appartiennent à L (appelé *image réciproque du sous-espace* L) est également un sous-espace et sa dimension est $\dim L + n_A$.

5.1.66. Trouver le défaut d'une fonctionnelle linéaire f sur un espace X de dimension n.

5.1.67. Trouver le noyau de chacune des fonctionnelles linéaires d'un espace euclidien tridimensionnel $f_1(x) = (x, a)$ et $f_2(x) = ([a, x], b)$.

5.1.68. Trouver l'image et le noyau d'un opérateur linéaire dans un espace euclidien tridimensionnel défini par la formule $Ax = [x, a]$.

5.1.69*. Même question pour l'opérateur $Ax = (a, [x, b])$.

Pour des transformations linéaires d'un espace arithmétique tridimensionnel données ci-dessous déterminer le défaut et le rang et construire les bases du noyau et de l'image. Chaque transformation est décrite par son action sur un vecteur arbitraire x; à cet effet, les composantes du vecteur Ax sont données comme des vecteurs des composantes du vecteur x.

5.1.70. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

5.1.71. $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$.

5.1.72. $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$.

5.1.73. Décrire l'image et le noyau d'un opérateur de dérivation dans l'espace M_n.

5.1.74. Examiner dans le même espace M_n l'*opérateur aux différences* A_h

$$A_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

où h est le nombre fixé différent de zéro. Trouver son image et son noyau.

5.1.75. Examiner l'application suivante de l'espace M_n dans l'espace arithmétique :

$$f(t) \to (f(a_1), \ldots, f(a_k)),$$

où $a_1, \ldots, a_k$ sont des nombres distincts. Trouver le défaut de cet opérateur.

5.1.76. Trouver l'image et le noyau d'un opérateur de projection (cf. problème 5.1.29).

5.1.77. Démontrer que pour complexifier l'espace réel R lors du passage à l'opérateur $\hat{A}$, le rang et le défaut d'un opérateur A de ω_{XY} se conservent (cf. problème 5.1.52).

§ 5.2. Opérations linéaires sur les opérateurs

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe, l'ensemble ω_{XY} de tous les opérateurs linéaires de X dans Y est considéré comme un espace vectoriel. L'attention est portée surtout aux questions suivantes :

1. Dimension de l'espace ω_{XY}.
2. Certaines classes des sous-espaces de l'espace ω_{XY}. Ici nous examinons de près comment sont liées les propriétés de la dépendance linéaire des opérateurs de ω_{XY} à la position relative des images de ces opérateurs.
3. Rang de la somme des opérateurs; conditions dans lesquelles il est égal à la somme des rangs des termes de l'addition.

5.2.1. Démontrer que l'ensemble ω_{XY} des opérateurs linéaires de X dans Y est un espace vectoriel par rapport à l'addition des opérateurs et à la multiplication d'un opérateur par un nombre.

5.2.2. Démontrer que l'espace des opérateurs linéaires qui agissent dans un espace vectoriel unidimensionnel est lui-même unidimensionnel.

5.2.3. L'espace vectoriel X^* des fonctionnelles qui agissent dans un espace X est dit *adjoint à l'espace* X. Démontrer que l'espace adjoint X^* est isomorphe à l'espace X.

5.2.4. Montrer que tout sous-espace L d'un espace X vérifie les relations

a) $(\lambda A)L=AL$, si $\lambda\neq 0$;

b) $(A+B)L\subset AL+BL$, où A et B sont des opérateurs de ω_{XY}.

Montrer que dans la relation b), en général, l'égalité n'a pas lieu.

5.2.5. Démontrer que les opérateurs non nuls A et B de ω_{XY} dont les images sont distinctes sont linéairement indépendants.

5.2.6. Soient $q_1, \ldots, q_m$ une base d'un espace Y, x un vecteur non nul d'un espace X. Démontrer que les opérateurs $B_1, \ldots, B_m$ tels que

$$B_j x=q_j, \quad j=1, \ldots, m, \tag{5.2.1}$$

sont linéairement indépendants.

5.2.7*. Démontrer que pour tout opérateur A de ω_{XY} il existe des opérateurs $B_1, \ldots, B_m$ tels que $A=B_1+\ldots+B_m$; en outre,

a) le rang de chacun des opérateurs B_l ne dépasse pas l'unité;

b) l'image d'un vecteur non nul B_l est tendue sur le vecteur q_l, où $q_1, \ldots, q_m$ est la base fixée de l'espace Y.

5.2.8. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base d'un espace X, y un vecteur non nul d'un espace Y. Démontrer que les opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ tels que

$$A_j e_k=\begin{cases} y, & k=j,\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

sont linéairement indépendants.

5.2.9. Démontrer que tout opérateur de rang 1 dont l'image contient le vecteur y est une combinaison linéaire des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ du problème précédent.

5.2.10*. Soient dans les espaces X et Y des bases fixées $e_1, \ldots, e_n$ et $q_1, \ldots, q_m$ respectivement. En utilisant les résultats des problèmes 5.2.7

et 5.2.9 montrer que tout opérateur de ω_{XY} est une combinaison linéaire des opérateurs $A_{11}, \ldots, A_{mn}$ satisfaisant aux relations

$$A_{ij}e_k=\begin{cases} q_i, & k=j, \\ 0, & k\neq j \end{cases} \quad i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, n. \tag{5.2.2}$$

5.2.11. En utilisant les résultats des problèmes 5.2.6 et 5.2.8 montrer que le système d'opérateurs défini par les relations (5.2.2) est linéairement indépendant. Déduire de ceci et du problème 5.2.10 la dimension de l'espace ω_{XY}.

5.2.12. L'ensemble des opérateurs linéaires : a) de même image T; b) de même noyau N, sera-t-il un sous-espace linéaire de l'espace ω_{XY}?

5.2.13. Montrer que si T est un sous-espace d'un espace Y, l'ensemble ω_{XT} des opérateurs linéaires qui appliquent l'espace X dans T est un sous-espace de l'espace ω_{XY}. Trouver la dimension de ce sous-espace si dim $X=n$, dim $T=k$.

5.2.14. Montrer que si N est un sous-espace d'un espace X l'ensemble K_N des opérateurs linéaires de ω_{XY}, dont le noyau contient le sous-espace N, est un sous-espace de l'espace ω_{XY}. Trouver la dimension de ce sous-espace si dim $X=n$, dim $N=l$, dim $Y=m$.

5.2.15*. Soient L_1 et L_2 des sous-espaces arbitraires d'un espace Y, $L=L_1+L_2$, $L_0=L_1\cap L_2$. Démontrer les relations suivantes :

a) $\omega_{XL}=\omega_{XL_1}+\omega_{XL_2}$;

b) $\omega_{XL_0}=\omega_{XL_1}\cap\omega_{XL_2}$.

5.2.16. Supposons que l'espace Y soit décomposé en une somme directe des sous-espaces $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Démontrer que

$$\omega_{XY}=\omega_{XL_1}\dot{+}\omega_{XL_2}\dot{+}\ldots\dot{+}\omega_{XL_k}.$$

5.2.17. Démontrer que le rang de la somme des opérateurs A et B de ω_{XY} ne dépasse pas la somme des rangs de ces opérateurs.

5.2.18. Soient les opérateurs A et B de ω_{XX} tels que

$$X=T_A\dot{+}T_B=N_A\dot{+}N_B.$$

Démontrer que le rang de l'opérateur $A+B$ est égal à la somme des rangs des opérateurs A et B.

5.2.19. Déduire du problème 5.2.17 l'inégalité

$$r_{A+B}\geq|r_A-r_B|.$$

5.2.20*. Démontrer que tout opérateur A de ω_{XY} de rang r peut être mis sous la forme d'une somme de r opérateurs de rang 1 et ne peut pas l'être sous la forme d'une somme de moins de r de tels opérateurs.

5.2.21*. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la somme de deux opérateurs A et B de rang 1 soit un opérateur de rang ≤ 1.

5.2.22*. Un espace X est de dimension $n(>1)$. Démontrer que dans tout espace ω_{XX} tout sous-espace L de dimension $n+1$ contient au moins un opérateur de rang >1.

5.2.23. Supposons que les opérateurs A et B de ω_{XY} soient tels que pour tout vecteur x de X les vecteurs Ax et Bx soient colinéaires. Ceci signifie-t-il que les opérateurs A et B eux-mêmes sont colinéaires?

5.2.24*. Dans l'énoncé du problème 5.2.23 supposer que l'opérateur B est de rang n (où $n = \dim X$). Dans ce cas les opérateurs A et B sont-ils colinéaires?

5.2.25. Démontrer que les opérateurs A et B de rang 1 de même image T et de même noyau N sont colinéaires.

5.2.26. Démontrer que pour tout opérateur de projection P, l'opérateur $E-P$ est encore un opérateur de projection. Trouver la relation qui associe le noyau et l'image de l'opérateur $E-P$ avec le noyau et l'image de l'opérateur P.

5.2.27. Démontrer que les opérateurs P et R qui assurent la projection et l'application respectivement de l'espace X dans L_1 parallèlement à L_2 vérifient la relation $E+R=2P$.

5.2.28. Montrer que dans une complexification de l'espace réel R :

a) à l'opérateur $A+B$ correspond l'opérateur $\hat{A}+\hat{B}$ (cf. 5.1.52);

b) à l'opérateur αA correspond l'opérateur $\alpha\hat{A}$, α étant un nombre réel.

§ 5.3. Multiplication des opérateurs

Présentation des problèmes du paragraphe. Ici nous traiterons essentiellement des questions suivantes, relatives à la multiplication des opérateurs :

1. Image et noyau du produit des opérateurs.
2. Polynômes d'un opérateur.
3. Commutabilité des opérateurs.
4. Opérateurs non dégénérés.

Dans ce qui suit, en parlant de la multiplication des opérateurs qui agissent, peut être, dans des espaces distincts, nous supposerons partout que ces produits aient un sens.

5.3.1. Démontrer que le produit BA des opérateurs A et B vérifie les inégalités :

a) $r_{BA} \leq \min(r_A, r_B)$;

b) $n_{BA} \geq n_A$.

Si les opérateurs A et B agissent dans le même espace, on a

c) $n_{BA} \geq n_B$.

5.3.2. Démontrer que le produit BA des opérateurs A et B vérifie les relations suivantes :

a) $r_{BA} = r_A - \dim(T_A \cap N_B)$;

b) $n_{BA} = n_A + \dim(T_A \cap N_B)$.

Noter que b) conduit à l'inégalité suivante :

$$n_{BA} \leq n_A + n_B.$$

5.3.3*. Démontrer l'*inégalité de Frobenius*

$$r_{BA} + r_{AC} \leq r_A + r_{BAC}.$$

5.3.4. Soient A et B des opérateurs de ω_{XX}; de plus, $BA=0$. En résulte-t-il que $AB=0$?

5.3.5. Donner un exemple de deux opérateurs A et B tels que $AB=$ $=BA=0$.

5.3.6. Démontrer qu'un ensemble des opérateurs linéaires de ω_{XX} qui, l'opérateur A étant fixé, satisfont à la condition $AB=0$, est un sous-espace de l'espace ω_{XX}. Trouver la dimension de ce sous-espace si dim $X=n$ et le rang de l'opérateur A est r.

5.3.7. Même question pour l'ensemble des opérateurs C de ω_{XX} vérifiant la condition $CA=0$, l'opérateur A de rang r étant fixé.

5.3.8. Soient X un espace de dimension n et A un opérateur de rang r de ω_{XX}. Construisons à l'aide de l'opérateur A la transformation de l'espace ω_{XX} telle qu'à chaque opérateur B elle fasse correspondre un opérateur AB. Démontrer que cette transformation est linéaire. Trouver son rang et son défaut.

5.3.9. Soit A un opérateur arbitraire de ω_{XX} et supposons que N_l et T_l désignent respectivement le noyau et l'image d'un opérateur A^l. Démontrer que :

a) $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$

b) $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots$

5.3.10*. Démontrer que si dans une suite des sous-espaces N_1, N_2, N_3, ... (cf. problème 5.3.9), pour un certain q on a pour la première fois $N_q=N_{q+1}$, alors $N_q=N_{q+k}$ pour tout $k \geq 1$.

5.3.11. Un opérateur A de ω_{XX} est dit *nilpotent* s'il existe un nombre naturel q tel que $A^q=0$. Le plus petit de tels nombres q s'appelle *indice de nilpotence* de A. Démontrer que l'indice de tout opérateur nilpotent qui agit dans un espace de dimension n ne dépasse pas n.

5.3.12. Montrer que dans l'espace M_n l'opérateur de dérivation des polynômes est nilpotent. Trouver son indice de nilpotence.

5.3.13. Soient A un opérateur nilpotent d'indice q et x le vecteur tel que $A^{q-1} \neq 0$. Démontrer que le système de vecteurs x, Ax, A^2x, ..., $A^{q-1}x$ est linéairement indépendant.

5.3.14*. Démontrer que pour tout opérateur A de ω_{XX} dont le rang est 1 il existe un nombre α tel que $A^2=\alpha A$.

5.3.15. Montrer que tout opérateur de réflexion R vérifie la relation $R^2=E$.

5.3.16. Montrer que tout opérateur de projection P satisfait à la relation $P^2=P$.

5.3.17*. Démontrer que, inversement, tout opérateur P qui vérifie la condition $P^2=P$ est un opérateur de projection.

5.3.18. Montrer que les conditions $P_1+P_2=E$, $P_1P_2=0$ entraînent que :

a) P_1, P_2 sont des opérateurs de projection;

b) $P_2P_1=0$.

5.3.19. Démontrer que dans l'espace M_n un opérateur A, qui associe à tout polynôme $f(t)$ le polynôme $g(t)=f(t+1)$, est un polynôme de l'opérateur de dérivation.

5.3.20. On dit que $f(t)(f(t)\neq 0)$ est un *polynôme annulateur de A* si $f(A)=0$. Démontrer que, pour tout opérateur linéaire A qui agit dans un espace de dimension n, il existe un polynôme annulateur de degré $\leq n^2$.

5.3.21. Soit $m(t)$ un polynôme du plus petit degré parmi les polynômes annulateurs de l'opérateur A. Démontrer que $m(t)$ est diviseur de tout autre polynôme annulateur de A.

5.3.22. Démontrer que le polynôme $m(t)$ du problème 5.3.21 est défini uniquement à multiplication par un nombre non nul près. Le polynôme $m(t)$, normé par la condition imposée à son coefficient dominant d'être égal à un, s'appelle *polynôme minimal* de l'opérateur A.

5.3.23*. Trouver le polynôme minimal :

a) d'un opérateur de projection;

b) d'un opérateur de réflexion;

c) d'un opérateur nilpotent d'indice q.

5.3.24. Montrer que pour un opérateur de rang 1 le polynôme minimal est de degré 2.

5.3.25. Les opérateurs A et B de ω_{XX} sont dits *commutables* si $AB=BA$. Soient A un opérateur qui commute avec B, et B un opérateur qui commute avec C. S'ensuit-il que A commute avec C?

5.3.26. Montrer que deux polynômes quelconques d'un opérateur A sont commutables.

5.3.27. Montrer que si les opérateurs A et B sont commutables, deux polynômes quelconques $f(A)$ et $g(B)$ de ces opérateurs sont commutables eux aussi.

5.3.28. Démontrer que pour des opérateurs commutables A et B

$$(A+B)^n=A^n+nA^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2+\ldots B^n.$$

5.3.29. Démontrer que les opérateurs de rang 1 de même noyau et de même image sont commutables.

5.3.30. Les opérateurs A et B sont commutables. Démontrer que $BN_A\subset N_A$.

5.3.31*. Démontrer que si les opérateurs de projection P_1 et P_2 sont commutables, leur produit est également un opérateur de projection. De plus :

a) $T_{P_1P_2}=T_{P_1}\cap T_{P_2}$;

b) $N_{P_1P_2}=N_{P_1}+N_{P_2}$.

5.3.32*. Démontrer que la somme des opérateurs de projection P_1 et P_2 est un opérateur de projection si et seulement si $P_1P_2=P_2P_1=0$. En outre,

a) $T_{P_1+P_2}=T_{P_1}+T_{P_2}$;

b) $N_{P_1+P_2}=N_{P_1}\cap N_{P_2}$.

5.3.33*. Démontrer que si un opérateur A commute avec chaque opérateur de ω_{XX}, alors $AL\subset L$ pour tout sous-espace L de X. En particulier, pour tout vecteur x de X les vecteurs x et Ax sont colinéaires.

5.3.34. En appliquant le résultat du problème 5.3.33, démontrer le *lemme de Schur* : si un opérateur A commute avec chaque opérateur de ω_{XX}, alors c'est un opérateur *scalaire*, c'est-à-dire, pour un certain nombre α, $A=\alpha E$.

5.3.35. Montrer que si A est un opérateur non dégénéré, tout sous-espace L donne lieu à l'inégalité $\dim L=\dim AL$.

5.3.36. Un espace X est somme directe des sous-espaces $L_1, \ldots, L_k$. Soit A_i un opérateur non dégénéré sur le sous-espace L_i, $i=1, \ldots, k$. Montrer que l'opérateur A de ω_{XX} qui coïncide sur chacun des sous-espaces L_i avec l'opérateur correspondant A_i est un opérateur non dégénéré.

5.3.37. Vérifier que l'opérateur de dérivation :

a) est dégénéré dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$;

b) est non dégénéré sur un espace vectoriel bidimensionnel tendu sur les fonctions $f_1=\cos t$ et $f_2=\sin t$ (aux définitions usuelles de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre).

5.3.38. Trouver l'opérateur inverse de l'opérateur de dérivation du problème 5.3.37, b).

5.3.39. Trouver l'opérateur inverse d'un opérateur de réflexion R.

5.3.40. Montrer que pour un opérateur A non dégénéré et pour tout nombre α différent de zéro

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

5.3.41*. Démontrer que si A est un opérateur de rang 1, au moins l'un des opérateurs $E+A$ et $E-A$ est non dégénéré.

5.3.42. Démontrer que si un opérateur A est non dégénéré, pour tout opérateur B

$$r_{AB}=r_{BA}=r_B.$$

5.3.43. Démontrer que le produit des opérateurs A et B est un opérateur non dégénéré si et seulement si chacun des opérateurs A et B est non dégénéré. De plus,

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

5.3.44. Démontrer qu'un opérateur A non dégénéré et un opérateur B arbitraire vérifient l'identité

$$(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B).$$

5.3.45. Soit A un opérateur nilpotent d'indice q. Démontrer que l'opérateur $E-A$ est non dégénéré et que

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^{q-1}.$$

5.3.46. Les opérateurs A et B sont liés par la relation $AB+A+E=0$. Démontrer que A est un opérateur non dégénéré, de plus, $A^{-1}=-E-B$.

5.3.47. Démontrer que si le terme constant du polynôme $f(t)$ annulateur de l'opérateur A est différent de zéro, A est alors non dégénéré.

5.3.48. Démontrer que le terme constant du polynôme minimal $m(t)$ annulateur d'un opérateur non dégénéré est différent de zéro.

5.3.49. Démontrer que pour un opérateur non dégénéré A qui agit dans un espace de dimension n, l'inverse A^{-1} est représenté par un polynôme de A de degré n^2-1 au plus.

5.3.50. Montrer que deux polynômes quelconques $f(A)$ et $g(A^{-1})$, où A est un opérateur non dégénéré, sont commutables.

5.3.51. Soit A un opérateur de ω_{XY}; par ailleurs, il existe un opérateur B de ω_{XY} tel que $BA=E_X$ (opérateur identique de l'espace X). Ceci signifie-t-il que $AB=E_Y$?

5.3.52. Soient X l'enveloppe linéaire des polynômes t, t^2, ..., t^n, Y l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$. Etudier la dérivation des polynômes comme un opérateur A de X dans Y, ainsi que l'intégration (c'est-à-dire une transformation qui à chaque polynôme fait correspondre sa primitive) comme un opérateur B de Y dans X. Montrer que

$$BA=E_X, \quad AB=E_Y.$$

5.3.53. Supposons que dans l'énoncé du problème **5.3.51**, $\dim Y > \dim X$. Démontrer que l'opérateur AB sera un opérateur de projection dans l'espace Y.

5.3.54. Montrer que lors de la complexification de l'espace réel R :

a) à un opérateur AB correspond l'opérateur $\hat{A}\hat{B}$;

b) à un opérateur non dégénéré A correspond l'opérateur non dégénéré $\hat{A}$;

c) si A est non dégénéré, à l'inverse A^{-1} correspond l'inverse $\hat{A}^{-1}$.

§ 5.4. Opérations sur les matrices

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous examinons diverses propriétés des opérations définies sur les matrices et, en premier lieu, certes, la multiplication. Parmi les problèmes que nous traitons ici, nous sommes attachés surtout à l'examen des questions suivantes :

1. Propriétés formelles de la multiplication : dimensions des facteurs et du produit, nombre des opérations arithmétiques élémentaires, etc.
2. Matrices des transformations élémentaires.
3. Commutativité des matrices.
4. Classes des matrices fermées par rapport à la multiplication.
5. Rang du produit des matrices.
6. Opérations sur les matrices divisées en blocs : matrices partitionnées.
7. Produit kroneckerien des matrices.

Trouver les produits AB et BA, où

5.4.1. $A=(2\ \ -3\ \ \ 0)$, $\quad B=\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.2. $A=\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$, $\quad B=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Trouver le produit AB, où

5.4.3. $A=\begin{Vmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$

5.4.4. $A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{Vmatrix}.$

5.4.5. $A=\begin{Vmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

5.4.6. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{Vmatrix}.$

5.4.7. $A=\begin{Vmatrix} 923 & 2115 & 0 & 0 \\ 1097 & 518 & 0 & 0 \\ 652 & 769 & 0 & 0 \\ 841 & 134 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 476 & 372 & 1505 & 882 \\ 549 & 795 & 999 & 400 \end{Vmatrix}.$

5.4.8*. Calculer le produit ABC, où

$$A=\begin{Vmatrix} 991 & 992 & 993 \\ 994 & 995 & 996 \\ 997 & 998 & 999 \\ 1000 & 1001 & 1002 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{Vmatrix}, \quad C=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.4.9*. Calculer le produit $ABCD$, où

$$A=\begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 213 & 510 & 128 \end{Vmatrix}, \quad C=\begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad D=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.4.10. Montrer qu'en introduisant les matrices

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad b=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix}, \quad x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix},$$

le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m, \end{aligned}$$

peut être mis sous la forme d'une équation matricielle $Ax=b$.

5.4.11. Montrer que, inversement, la résolution d'une équation matricielle $AX=B$, où A et B sont les matrices données de types $m\times n$ et $m\times p$ respectivement, se ramène à la résolution de p systèmes d'équations linéaires de même matrice des coefficients A et de seconds membres distincts.

Résoudre les équations matricielles

5.4.12. $\begin{Vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{Vmatrix} X=\begin{Vmatrix} 3 & 0\\ 7 & 2\end{Vmatrix}.$

5.4.13. $X\begin{Vmatrix} 3 & 2\\ -2 & -1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -1 & 2\\ -1 & 1\end{Vmatrix}.$

5.4.14. $\begin{Vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix} X-X\begin{Vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{Vmatrix};$

5.4.15. $X-\begin{Vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3\end{Vmatrix} X\begin{Vmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}.$

5.4.16. $X\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 8\\ 0 & 1 & 6\end{Vmatrix}.$

5.4.17. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{Vmatrix} X=\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{Vmatrix}.$

5.4.18. Montrer que si deux produits AB et BA ont un sens et A est une matrice $m\times n$, alors B est une matrice $n\times m$.

5.4.19. Calculer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour multiplier une matrice A de type $m\times n$ par une matrice B de type $n\times p$.

5.4.20. Soient A, B, C des matrices de types $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ respectivement. Calculer le nombre de multiplications nécessaires pour obtenir le produit ABC. Noter que cette quantité d'opérations est fonction de la disposition des parenthèses dans le produit ABC.

5.4.21. Vérifier si pour les matrices carrées A et B d'ordre 2 la succession ci-dessous des calculs de la matrice $C=AB$ impose 7 multiplications (alors

que pour construire AB à l'aide de l'algorithme usuel il faut 8 multiplications) :

$$\alpha_1=(a_{11}+a_{22})(b_{11}+b_{22}),$$
$$\alpha_2=(a_{21}+a_{22})b_{11},$$
$$\alpha_3=a_{11}(b_{12}-b_{22}),$$
$$\alpha_4=a_{22}(b_{21}-b_{11}),$$
$$\alpha_5=(a_{11}+a_{12})b_{22},$$
$$\alpha_6=(a_{21}-a_{11})(b_{11}+b_{12}),$$
$$\alpha_7=(a_{12}-a_{22})(b_{21}+b_{22}).$$
$$c_{11}=\alpha_1+\alpha_4-\alpha_5+\alpha_7,$$
$$c_{12}=\alpha_3+\alpha_5,$$
$$c_{21}=\alpha_2+\alpha_4,$$
$$c_{22}=\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2+\alpha_6.$$

Cet algorithme est proposé par Strassen.

5.4.22. On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme des éléments de sa diagonale principale. La trace d'une matrice A est notée $\operatorname{tr} A$.

Démontrer que les propriétés suivantes sont respectées :

a) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr} A+\operatorname{tr} B$;

b) $\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha \operatorname{tr} A$;

c) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

Si les deux produits AB et BA ont un sens, la dernière égalité est également vraie pour A et B rectangulaires.

5.4.23. Les matrices A et B de types $m\times n$ et $n\times p$ respectivement possèdent cette propriété que pour chacune d'elles la somme des éléments d'une ligne est la même pour toutes les lignes et égale à r pour la matrice A, et à s, pour la matrice B. Démontrer que le produit AB jouit de la même propriété; par ailleurs, les sommes correspondantes de la matrice AB valent rs. Formuler et démontrer une formulation analogue pour les colonnes.

5.4.24. Montrer que les transformations élémentaires des lignes d'une matrice A (cf. problème 4.1.26) sont équivalentes à la prémultiplication de cette matrice par des matrices de forme spéciale appelées *matrices des transformations élémentaires* :

a) à la permutation des i-ième et j-ième lignes correspond la multiplication par la matrice P_{ij}

$$P_{ij}=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}$$

[les éléments non indiqués de la diagonale principale valent 1; tous les autres éléments sauf (i, j) et (j, i) sont nuls];

b) à la multiplication de la i-ième ligne par le nombre α correspond la multiplication par la matrice diagonale D_i

$$D_i = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|;$$

c) l'addition à la i-ième ligne du produit de la j-ième ligne par le nombre α équivaut à la multiplication par la matrice L_{ij}

$$L_{ij} = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

[tous les éléments hors diagonaux de cette matrice sauf l'élément (i, j) sont nuls].

Formuler et démontrer des propositions analogues pour les transformations élémentaires des colonnes de A.

5.4.25. Comment change une matrice A prémultipliée

a) par la matrice N_i

$$N_i = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_{i+1,i} & & \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_{ni} & & & 1 \end{matrix} \right\|;$$

b) par la matrice S_i

$$S_i=\left\|\begin{matrix} 1 & & & \alpha_{1i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \alpha_{i-1,i} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \alpha_{i+1,i} & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \alpha_{ni} & & & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Les éléments hors diagonaux non indiqués des deux matrices sont nuls.

Même question pour la postmultiplication d'une matrice A par les matrices S_i et N_i.

5.4.26. Démontrer que a) la matrice N_i du problème précédent est le produit des matrices L_{ki}, $k=i+1, \ldots, n$ (cf. problème 5.4.24, c)); b) la matrice S_i est le produit des matrices L_{ki}, $k=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$; c) les éléments non triviaux des facteurs de L_{ki} coïncident avec les éléments non triviaux correspondants de la matrice $N_i(S_i)$; d) dans les deux cas, l'ordre des facteurs du produit peut être quelconque.

5.4.27. Démontrer que, pour $i<j$, le produit N_iN_j des matrices N_i et N_j est de la forme suivante :

$$N_iN_j=\left\|\begin{matrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \alpha_{i+1,i} & 1 & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & \alpha_{j,i} & & 1 & & \\ & & \alpha_{j+1,i} & & \alpha_{j+1,j} & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_{ni} & & \alpha_{nj} & & & 1 \end{matrix}\right\|.$$

(les éléments hors diagonaux non indiqués sont nuls).

5.4.28*. On appelle *matrice des permutations P* une matrice carrée dont chaque ligne et chaque colonne comptent un seul élément différent de zéro et valant 1. Démontrer que toute matrice des permutations est un produit des matrices P_{ij} (cf. problème 5.4.24, a)).

Calculer les expressions (si l'ordre de la matrice n'est pas explicité, il est égal à n) :

5.4.29. $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|^k$. **5.4.30.** $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|^k$.

5.4.31. $$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n \end{Vmatrix}^k$$ (tous les éléments hors diagonaux sont nuls).

5.4.32. $$\begin{Vmatrix} 0 & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \\ \lambda_n & & & & 0 \end{Vmatrix}^k.$$

5.4.33. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & \cdot & 0 \end{Vmatrix}^k$$

[tous les éléments, sauf les éléments des cases $(i;\ i+1)$, $i=1, \ldots, n-1$, sont nuls].

5.4.34. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & & \cdot & 0 \end{Vmatrix}^k$$

[tous les éléments de la matrice, sauf ceux des cases (1, 2), (2, 3), (3, 4), ..., $(n-1, n)$, $(n, 1)$, sont nuls].

5.4.35*. Démontrer que pour une matrice d'ordre $n\times n$

$$J_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & \cdot & \lambda \end{Vmatrix}$$

la matrice J_λ^k est de la forme ($k \geq n$)

$$J_\lambda^k = \left\| \begin{matrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ & & \lambda^k & \dots & C_k^{n-3}\lambda^{k-n+3} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^k \end{matrix} \right\|.$$

La matrice J_λ s'appelle *cellule de Jordan associée au nombre* λ.

5.4.36. Soit D une matrice diagonale d'ordre n à éléments diagonaux tous distincts. Démontrer que a) tout polynôme de D est une matrice diagonale; b) toute matrice diagonale peut être mise sous la forme d'un polynôme $f(D)$ de D; c) on peut choisir un polynôme $f(t)$ tel que son degré ne dépasse pas $n-1$.

5.4.37. Démontrer que pour toute matrice diagonale d'ordre n le degré du polynôme minimal ne dépasse pas n. Le polynôme minimal d'une matrice se définit d'une façon analogue au polynôme minimal d'un opérateur. Pour la définition de ce polynôme cf. problème 5.3.20.

5.4.38. Montrer que le polynôme minimal d'une matrice diagonale d'ordre n à éléments diagonaux distincts deux à deux est du n-ième degré.

5.4.39. Démontrer qu'une matrice qui commute avec une matrice diagonale à éléments diagonaux distincts deux à deux est elle-même une matrice diagonale.

5.4.40*. Une matrice carrée est dite *scalaire* si elle est diagonale et si tous ses éléments diagonaux sont égaux entre eux. En utilisant les résultats du problème 5.4.39 démontrer le *lemme de Schur :* si une matrice carrée A commute avec toutes les matrices carrées de même ordre, c'est une matrice scalaire (comparez avec le problème 5.3.34).

5.4.41. Montrer que pour toute matrice A l'ensemble des matrices commutables avec A est a) un sous-espace; b) un anneau.

Trouver la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice

5.4.42. $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$. **5.4.43*.** $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix} \right\|$

(l'ordre de la matrice est n).

5.4.44. Démontrer que toute matrice commutable avec la matrice A commute avec la matrice $A-\lambda E$ quel que soit le nombre λ. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec une cellule de Jordan J_λ est le même pour tous les λ et, par suite, coïncide avec l'ensemble du problème

5.4.43. D'après le problème 5.4.41, cet ensemble est un sous-espace. Déterminer sa dimension.

5.4.45. Une matrice carrée A est dite *triangulaire supérieure* si $a_{ij}=0$ pour $i>j$. D'une façon analogue une matrice carrée A telle que $a_{ij}=0$, si $i<j$, est dite *triangulaire inférieure*. Démontrer que le produit des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de même ordre est lui-même une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

5.4.46. Trouver le nombre de multiplications nécessaires pour calculer le produit de deux matrices triangulaires d'ordre n de même forme (c'est-à-dire de deux matrices triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures).

5.4.47. Une matrice est dite *strictement triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si $a_{ij}=0$ pour $i\geq j (i\leq j)$. Démontrer que, pour un produit B de deux matrices strictement triangulaires A_1 et A_2 de même forme, $b_{ij}=0$ pour $i\geq j-1$ $(i\leq j+1)$.

5.4.48. Montrer que pour une matrice strictement triangulaire A d'ordre n la n-ième puissance de A est égale à la matrice nulle.

5.4.49. On appelle *matrice de Tieplitz* une matrice carrée d'ordre $n+1$ à structure

$$A=\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-1} & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ldots a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ldots a_{n-3} & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \ldots a_0 & a_1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \ldots a_{-1} & a_0 \end{matrix}\right\|.$$

Par là même une telle matrice est bien définie par $2n+1$ nombres.

Démontrer qu'une matrice triangulaire supérieure A est une matrice de Tieplitz si et seulement si elle est un polynôme d'une cellule de Jordan J_0.

5.4.50. Déduire du résultat du problème 5.4.49 que a) un produit des matrices triangulaires supérieures de Tieplitz est lui-même une matrice de cette classe; b) deux matrices quelconques de cette classe sont commutables.

5.4.51. Prouver qu'un produit de deux matrices commutables est lui-même une matrice commutable.

5.4.52. Une matrice carrée A d'ordre $n+1$ s'appelle *matrice circulante* si sa structure est la suivante :

$$\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 \ldots a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_0 \ldots a_{n-3} & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n & a_0 \end{matrix}\right\|.$$

Ainsi, les matrices de cette classe sont bien définies par $n+1$ nombres.

Démontrer qu'une matrice C est une matrice circulante si et seulement si elle constitue un polynôme des matrices de permutation P du problème 5.4.34.

5.4.53. Déduire du résultat du problème 5.4.52 a) un produit des matrices circulantes est lui-même une matrice circulante; b) deux matrices circulantes quelconques sont commutables.

5.4.54. Quel est le nombre de multiplications nécessaire pour calculer le produit de deux matrices circulantes d'ordre n?

5.4.55. Une matrice carrée A d'ordre n s'appelle *matrice bande* si pour un certain nombre m ($<n$) tous les éléments a_{ij} tels que $|i-j|>m$ sont nuls. Le nombre $2m+1$ s'appelle *largeur de la bande.*

Démontrer que le produit des matrices bandes est lui-même une matrice bande. Déterminer la largeur minimale de la bande pour le cas d'un produit, si la largeur des facteurs est $2m_1+1$ et $2m_2+1$ respectivement.

5.4.56. Une matrice carrée A aux éléments non négatifs est dite *stochastique* si la somme des éléments de chaque ligne de cette matrice vaut 1. Si, de plus, la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1, la matrice est dite *bistochastique*. Démontrer que :

a) un produit des matrices stochastiques est une matrice stochastique;

b) un produit des matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.

5.4.57. En partant de la règle de multiplication des matrices démontrer que le rang d'un produit AB ne dépasse pas le rang de chacun des facteurs A et B.

5.4.58. La matrice de type $n\times n$ est un produit des matrices rectangulaires A et B de types $n\times m$ et $m\times n$ respectivement; de plus, $m<n$. Démontrer que le déterminant de la matrice C est nul.

5.4.59. Prouver que la matrice A de type $m\times n$ de rang 1 peut être mise sous la forme du produit $A=xy$, où x est une matrice de type $m\times 1$ et y une matrice de type $1\times n$. Une telle représentation est-elle unique?

5.4.60. Soit $A=xy$ une matrice de type $n\times n$ de rang 1. Démontrer qu'il existe un nombre α tel que $A^2=\alpha A$. Trouver l'expression du nombre α à travers les éléments des matrices x et y.

5.4.61. Trouver le nombre de multiplications nécessaires pour calculer le produit de deux matrices A et B de rang 1, si l'on connaît les représentations $A=xy$ et $B=uv$ de ces matrices.

5.4.62*. Montrer que la matrice A de type $m\times n$ de rang r peut être mise sous la forme d'un produit $A=BC$, où B est une matrice de type $m\times r$ et C une matrice de type $r\times n$. Une telle représentation est-elle unique?

La représentation de la matrice A obtenue dans le problème 5.4.62 s'appelle *décomposition suivant le rang* de cette matrice. Trouver la décomposition suivant le rang des matrices suivantes :

5.4.63. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. **5.4.64.** $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.65. Une matrice rectangulaire A décomposée en sous-matrices par des lignes horizontales et verticales s'appelle *matrice partitionnée* ou *décomposée en blocs*. Les sous-matrices elles-mêmes s'appellent *cellules* ou *blocs* et sont notées A_{ij}. Par exemple, si la matrice A est décomposée en trois « lignes de blocs » et deux « colonnes de blocs » on la met sous la forme

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix}\right\|.$$

Montrer que :

a) la multiplication d'une matrice décomposée en blocs par un nombre équivaut à la multiplication par ce nombre de chacun des blocs;

b) l'addition de deux matrices rectangulaires de même type décomposées en blocs de la même façon se ramène à l'addition des blocs de même indice;

c) si A et B sont deux matrices rectangulaires de type $m\times n$ et $n\times p$ respectivement, décomposées en blocs, et si, de plus,

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2s} \\ \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} \dots A_{rs} \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \dots B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} \dots B_{2t} \\ \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} \dots B_{st} \end{matrix}\right\|,$$

le nombre de colonnes de chaque bloc A_{ij} étant égal au nombre de lignes du bloc B_{jk}, la matrice $C=AB$ peut être également mise sous la forme partitionnée

$$C=\left\|\begin{matrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{2t} \\ \dots & \dots \\ C_{r1} & C_{r2} \dots C_{rt} \end{matrix}\right\|,$$

où

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{s} A_{ij}B_{jk}, \quad i=1, \dots, r; \; k=1, \dots, t.$$

Cette condition peut être formulée d'une autre façon : le nombre de colonnes de A contenues dans chaque colonne de blocs est égal au nombre de lignes de B contenues dans la ligne de blocs de même indice;

d) si A et B sont des matrices carrées de même ordre décomposées en blocs de la même façon, les blocs diagonaux A_{ii} et B_{ii}, $i=1, \dots, r$, étant des blocs carrés, la matrice $C=AB$ peut être mise sous la même forme partitionnée et

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{r} A_{ij}B_{jk}, \quad i, k=1, \dots, r.$$

5.4.66. Une matrice carrée D décomposée en blocs est dite *quasi diagonale* si ses blocs diagonaux sont carrés, et ses blocs hors diagonaux

des sous-matrices nulles. Montrer que les opérations sur les matrices quasi diagonales de même structure en blocs donnent des matrices quasi diagonales de même structure. Noter que la multiplication des matrices quasi diagonales A et B donne des blocs diagonaux de la matrice $C=AB$ égaux aux produits $A_{ii}B_{ii}$ des blocs diagonaux de même indice des facteurs. En déduire que les matrices quasi diagonales A et B de même structure sont commutables si et seulement si leurs blocs diagonaux de même indice sont commutables.

5.4.67*. Trouver la forme générale des matrices commutables avec la matrice quasi diagonale

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r E_{k_r} \end{Vmatrix}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$).

5.4.68. Une matrice carrée A décomposée en blocs est dite *quasi triangulaire* si ses blocs diagonaux sont carrés, alors que les blocs hors diagonaux A_{ij}, $i>j\,(i<j)$ sont des sous-matrices nulles. Montrer que les opérations sur les matrices quasi triangulaires de même structure partitionnée, supérieures ou inférieures, conduisent à des matrices quasi triangulaires de même structure. Noter que la multiplication des matrices quasi triangulaires supérieures (resp. inférieures) A et B donne des blocs diagonaux de la matrice $C=AB$ égaux aux produits $A_{ii}B_{ii}$ des blocs de même indice des facteurs.

5.4.69*. En utilisant l'algorithme de Strassen (cf. problème 5.4.21) indiquer le mode de calcul du produit $C=AB$ des matrices carrées A et B d'ordre 4 qui demande seulement 49 multiplications au lieu de 64 multiplications nécessaires pour opérer suivant le mode usuel.

5.4.70. Soit A une matrice complexe d'ordre n. Mettons-la sous la forme $A=B+iC$, où B et C sont des matrices réelles, et faisons lui correspondre la matrice réelle D d'ordre $2n$

$$D=\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Montrer que si A_1 et A_2 sont des matrices complexes d'ordre $n\times n$, D_1 et D_2 des matrices réelles d'ordre double composées de la façon indiquée, alors, au produit A_1A_2 correspond le produit D_1D_2. Noter que dans un cas particulier on obtient avec $n=1$ une correspondance entre les nombres complexes $z=x+iy$ et les matrices réelles d'ordre 2 de la forme

$$\begin{Vmatrix} x & -y \\ y & x \end{Vmatrix}.$$

5.4.71. Soit un vecteur colonne complexe z_0 d'ordre n, solution d'un système d'équations linéaires $Az=b$, où A est une matrice complexe A de type $m\times n$, b un vecteur colonne complexe d'ordre m. Mettons A, b, z_0 sous la forme $A=B+iC$; $b=f+ig$; $z_0=x_0+iy_0$, où B et C sont des matrices réelles, f, g, x_0, y_0 des vecteurs colonnes réels. Montrer que le vecteur colonne réel

$$u_0=\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$$

d'ordre $2n$ est une solution d'un système de $2m$ équations à coefficients réels $Du=d$, où

$$D=\begin{Vmatrix} B & -C \\ C & B \end{Vmatrix}, \quad d=\begin{Vmatrix} f \\ g \end{Vmatrix}.$$

5.4.72. Montrer que l'opération de transposition est associée à d'autres opérations sur les matrices par les propriétés suivantes :

a) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;

b) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

c) $(AB)^T=B^TA^T$.

5.4.73*. Soient A et B des matrices rectangulaires de types $m\times n$ et $p\times q$ respectivement. On appelle *produit kroneckerien* $A\times B$ des matrices A et B la matrice C de type $mp\times nq$ qu'on peut mettre sous la forme partitionnée

$$C=\begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{Vmatrix}.$$

Démontrer qu'un produit kroneckerien vérifie les conditions :

a) $(\alpha A)\times B=A\times(\alpha B)=\alpha(A\times B)$;

b) $(A+B)\times C=A\times C+B\times C$;

c) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$;

d) si les produits AB et CD ont un sens, on a

$$(AB)\times(CD)=(A\times C)(B\times D);$$

e) la permutation des lignes et des colonnes permet de ramener la matrice $A\times B$ à la matrice $B\times A$; de plus, si A et B sont des matrices carrées, les permutations des lignes et des colonnes sont les mêmes.

5.4.74. Montrer que la représentation d'une matrice A de rang 1 par le produit $A=xy$ (cf. problème 5.4.59) peut être interprétée comme une représentation de A sous la forme d'un produit kroneckerien

$$A=y\times x.$$

5.4.75*. Soient $e_1, \dots, e_m$ une base de l'espace des vecteurs colonnes d'ordre m (c'est-à-dire des matrices de type $m\times 1$); $f_1, \dots, f_n$ une base de

l'espace des vecteurs lignes d'ordre n (c'est-à-dire des matrices de type $1\times n$). Démontrer que les produits kroneckeriens $f_j\times e_i$ engendrent une base de l'espace des matrices de type $m\times n$.

5.4.76. Démontrer que le produit kroneckerien des matrices carrées A et B d'ordres distincts peut être :

a) une matrice diagonale, si A et B sont des matrices diagonales;

b) une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), si A et B sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures);

c) une matrice stochastique (resp. bistochastique), si A et B sont des matrices stochastiques (resp. bistochastiques).

5.4.77*. Soient A et B des matrices carrées d'ordre m et d'ordre n respectivement. Démontrer que :

a) $\operatorname{tr}(A\times B)=(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)$;

b) $\det(A\times B)=(\det A)^n\cdot(\det B)^m$.

5.4.78. Soient A, B et C des matrices rectangulaires de types $m\times n$, $p\times q$ et $m\times q$ respectivement. Considérons l'équation matricielle $AXB=C$ par rapport à la matrice X de type $n\times p$ comme un système de mq équations linéaires par rapport à np coefficients inconnus de cette matrice indicée dans l'ordre suivant :

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2p}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np}.$$

Les équations du système sont indicées conformément à l'indexation analogue (« par lignes ») des coefficients de la matrice C

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1q}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2q}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mq}.$$

Démontrer que la matrice du système donné d'équations linéaires est $A\times B^T$. Mais si on indicie les coefficients des matrices X et C d'après les colonnes

$$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \ldots, x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np};$$

$$c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1}, c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{m2}, \ldots, c_{1q}, c_{2q}, \ldots, c_{mq},$$

la matrice du système devient $B^T\times A$.

5.4.79. Montrer que si l'équation matricielle

$$AX+XB=C,$$

où A est une matrice d'ordre $m\times m$, B une matrice d'ordre $n\times n$ et C une matrice de type $m\times n$, est considérée comme un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients de la matrice X de type $m\times n$, la matrice de ce système est :

a) $A\times E_n+E_m\times B^T$, si les coefficients des matrices X et C sont indicés d'après les lignes;

b) $E_n\times A+B^T\times E_m$, si les coefficients des matrices X et C sont indicés d'après les colonnes.

5.4.80. Les éléments d'une matrice A de type $m\times n$ sont des fonctions dérivables réelles de la variable réelle t. On appelle *dérivée* d'une matrice A la matrice dA/dt de type $m\times n$

$$\frac{dA}{dt}=\left\|\begin{matrix}\frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt}\\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt}\end{matrix}\right\|.$$

Démontrer que pour la dérivation des matrices ainsi définies on observe les propriétés suivantes :

a) $\frac{d}{dt}(\alpha A)=\alpha\frac{dA}{dt}$;

b) $\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}$;

c) $\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$;

d) $\frac{d}{dt}(A^T)=\left(\frac{dA}{dt}\right)^T$.

§ 5.5. Matrice inverse

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous décrivons ici les divers modes de calcul d'une matrice inverse et les formes des matrices inverses des classes matricielles d'usage général. De même qu'au § 5.4, nous nous attachons à l'étude des matrices des transformations élémentaires et des matrices décomposées en blocs. A la fin du paragraphe nous donnons des problèmes imposant l'application de la formule de Binet-Cauchy.

En utilisant l'expression explicite des éléments de A^{-1} par les éléments de A, calculer les inverses des matrices suivantes :

5.5.1. $\left\|\begin{matrix}5 & -4\\ -8 & 6\end{matrix}\right\|$.

5.5.2. $\left\|\begin{matrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{matrix}\right\|$.

5.5.3. $\left\|\begin{matrix}a & -b\\ b & a\end{matrix}\right\|$, $a^2+b^2\neq 0$.

5.5.4. $\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$, $ad-bc\neq 0$.

5.5.5. $\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

5.5.6. $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$

5.5.7. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{Vmatrix}.$ **5.5.8.** $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

5.5.9. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$ **5.5.10.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$

5.5.11. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{Vmatrix}.$

5.5.12*. $\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{Vmatrix}, \quad a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0.$

5.5.13. Démontrer que l'ensemble des matrices réelles de la forme

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix},$$

où α est un nombre réel quelconque, forme un groupe commutatif de multiplication.

5.5.14. Prouver que l'ensemble des matrices réelles de la forme

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$$

possède une structure de corps par rapport à l'addition et à la multiplication

usuelles des matrices. Montrer que la correspondance entre les matrices de cette forme et les nombres complexes

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix} \to z = a + ib,$$

est biunivoque et conserve les opérations.

5.5.15*. Démontrer que l'ensemble des matrices réelles de la forme

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{Vmatrix}$$

a une structure d'anneau par rapport à l'addition et à la multiplication usuelles des matrices.

Démontrer que les matrices non nulles de cette forme constituent un groupe multiplicatif qui, de plus, est non commutatif.

5.5.16*. Un ensemble des matrices,

a) dont les matrices sont toutes dégénérées;

b) qui compte des matrices dégénérées aussi bien que des matrices non dégénérées,

peut-il former un groupe?

5.5.17*. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est elle-même une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Déduire de ceci et du problème 5.4.45 le corollaire qui suit : l'ensemble des matrices triangulaires non dégénérées forme un groupe multiplicatif.

5.5.18*. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire de Tieplitz est elle-même une matrice triangulaire de Tieplitz de la même forme. Déduire de ceci et du problème 5.4.50 le corollaire qui suit : l'ensemble des matrices triangulaires de Tieplitz non dégénérées de même forme engendre un groupe multiplicatif.

5.5.19*. Démontrer que l'inverse d'une matrice circulante est elle-même une matrice circulante. Déduire de ceci et du problème 5.4.53 le corollaire qui suit : l'ensemble des matrices circulantes non dégénérées forme un groupe multiplicatif.

5.5.20*. Une matrice non dégénérée A possède cette propriété que les sommes des éléments d'une ligne sont les mêmes pour toutes les lignes. Démontrer que l'inverse A^{-1} possède également cette propriété; de plus, si pour A les sommes des éléments des lignes sont $r \neq 0$, pour A^{-1} ces sommes sont $1/r$.

Enoncer et démontrer une proposition analogue sur les colonnes.

5.5.21. Démontrer que

a) un ensemble des matrices stochastiques non dégénérées;

b) un ensemble des matrices bistochastiques non dégénérées forme un groupe multiplicatif.

Trouver les inverses des matrices d'ordre n suivantes :

5.5.22. $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n \end{Vmatrix}$. **5.5.23.** $\begin{Vmatrix} 0 & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \\ \lambda_n & & & & 0 \end{Vmatrix}$

(tous les λ_i sont différents de zéro).

5.5.24. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & -1 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.25. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & -2 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.26. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.27*. $\begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & a & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 & a \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a \end{Vmatrix}$.

5.5.28. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 0 & 1 & 2 \dots n-1 \\ 0 & 0 & 1 \dots n-2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.29. Trouver les inverses des matrices des transformations élémentaires P_{ij}, D_i et L_{ij} (cf. problème 5.4.24).

5.5.30. Comment change l'inverse A^{-1} si dans la matrice A

a) on commute les i-ième et j-ième lignes;

b) la i-ième ligne est multipliée par le nombre α différent de zéro;

c) à la i-ième ligne on ajoute la j-ième ligne multipliée par le nombre α? Même question pour les colonnes A.

5.5.31. Trouver les inverses des matrices N_i et S_i (cf. problème 5.4.25).

5.5.32. Démontrer que pour une matrice non dégénérée A de la forme

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

l'inverse $B=A^{-1}$ est de la forme

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.5.33. Démontrer que l'inverse d'une matrice des permutations est elle-même une matrice des permutations. Montrer que l'ensemble des matrices des permutations d'ordre n donné forme un groupe multiplicatif et calculer le nombre d'éléments de ce groupe.

5.5.34. Montrer que le calcul de l'inverse de la matrice A d'ordre $n\times n$ peut être réduit à la résolution de n systèmes d'équations linéaires dont chacun compte n équations à n inconnues et dont la matrice des coefficients affectés aux inconnues est A. Comparer le nombre d'opérations arithmétiques nécessaire pour résoudre ces systèmes par la méthode de Gauss et celui du calcul de l'inverse en appliquant les expressions explicites de ses éléments par les éléments de A.

Par la méthode décrite dans le problème 5.5.34 calculer les inverses des matrices suivantes :

5.5.35. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$

5.5.36. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 5 & -10 \\ -6 & 9 & -10 & 15 \end{Vmatrix}.$

5.5.37*. Tous les mineurs pivots principaux d'une matrice A d'ordre $n\times n$ sont différents de zéro. Démontrer que la méthode de Gauss permet de mettre A sous la forme du produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure R : $A=LR$. On peut adopter que les éléments d'une de ces matrices valent un.

5.5.38. Montrer que la représentation d'une matrice A sous la forme du produit $A=LR$ obtenu dans le problème 5.5.37 est unique si les éléments diagonaux de la matrice L sont choisis égaux à un.

5.5.39. Démontrer que toute matrice non dégénérée A peut être mise sous la forme d'un produit $A=PLR$, où P est une matrice des permutations, L une matrice triangulaire inférieure, R une matrice triangulaire supérieure.

5.5.40*. Prouver que des transformations élémentaires des lignes et des colonnes permettent de ramener toute matrice A non dégénérée à la matrice unité.

5.5.41. Montrer que la proposition du problème 5.5.40 sera garantie si les transformations élémentaires ne portent que sur les lignes (resp. colonnes) de la matrice.

5.5.42. En utilisant le résultat du problème 5.5.40 démontrer que toute matrice non dégénérée peut être mise sous la forme d'un produit des matrices des transformations élémentaires.

5.5.43. Montrer que, si toutes les transformations élémentaires des lignes qui ramènent la matrice A non dégénérée donnée à la matrice unité sont appliquées dans la même succession aux lignes de la matrice unité, on obtient alors la matrice inverse A^{-1}.

Par la méthode indiquée dans le problème 5.5.43 trouver les inverses des matrices suivantes :

5.5.44. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$

5.5.45. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{Vmatrix}.$

5.5.46. Soit J_n une matrice d'ordre n dont tous les éléments valent un. Démontrer que

$$(E-J_n)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J_n.$$

5.5.47. Soit B une matrice de rang 1. D'après le problème 5.4.60, $B^2=\alpha B$ pour un certain nombre α. En supposant que $\alpha\neq-1$, démontrer que

$$(E+B)^{-1}=E-\beta B,$$

où $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$. Montrer que le problème 5.5.46 est un cas particulier de cette proposition.

5.5.48. Montrer que si une matrice A est non dégénérée, les matrices $A+B$ et $E+A^{-1}B$ sont toutes les deux dégénérées ou non dégénérées.

5.5.49*. Soit A une matrice non dégénérée dont l'inverse A^{-1} est connue; soit, ensuite, $B=xy$ une matrice de rang 1. Démontrer que si la matrice $A+B$ est non dégénérée, son inverse peut se trouver d'après la formule :

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-\beta A^{-1}BA^{-1},$$

où $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha=yA^{-1}x$. Ainsi, si on ajoute à la matrice A la matrice de rang 1, alors il faut ajouter également à l'inverse une matrice de rang 1.

5.5.50. Calculer dans le problème 5.5.49 le nombre de multiplications et de divisions nécessaires pour passer de A^{-1} à $(A+B)^{-1}$, en supposant connues les matrices x et y de la représentation de la matrice B.

5.5.51. Ajouter à l'élément a_{ij} d'une matrice non dégénérée A le nombre γ; la matrice $\tilde{A}$ ainsi obtenue est également une matrice non dégénérée. Trouver l'expression de $\tilde{A}^{-1}$ à travers γ et les éléments de la matrice A^{-1}.

5.5.52. Ajouter aux éléments de la dernière ligne d'une matrice non dégénérée A d'ordre n les nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de façon à conserver la non-dégénérescence de la matrice. Trouver l'expression de l'inverse de la matrice obtenue $\tilde{A}$ par les éléments de A^{-1} et les nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

5.5.53. Ajouter à tous les éléments d'une matrice A non dégénérée le même nombre a. La matrice obtenue $\tilde{A}$ est encore non dégénérée. Trouver l'expression de $\tilde{A}^{-1}$ à travers les éléments de A^{-1} et le nombre a.

Trouver les inverses des matrices d'ordre n suivantes :

5.5.54. $$\begin{Vmatrix} a & b & b \ldots b \\ b & a & b \ldots b \\ b & b & a \ldots b \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ b & b & b \ldots a \end{Vmatrix}, \quad a\neq b,\ a\neq b(1-n).$$

5.5.55. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 0 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 1 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1 & 1 & 1 \ldots 0 \end{Vmatrix}.$$

5.5.56. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 0 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 1 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1 & 1 & 1 \ldots 0 \end{Vmatrix}.$$

5.5.57. $\left\| \begin{matrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{matrix} \right\|$

(tous les a_i sont différents de zéro).

5.5.58. Démontrer que l'inverse de la matrice quasi diagonale non dégénérée D est elle-même une matrice quasi diagonale; de plus, elle est de la même structure partitionnée que D. Noter que les blocs diagonaux D^{-1} sont des inverses des blocs diagonaux D de même indice.

5.5.59. Démontrer que l'inverse d'une matrice A quasi triangulaire supérieure (resp. inférieure) non dégénérée est elle-même une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure); de plus, elle est de la même structure que A. Noter que les blocs diagonaux de A^{-1} sont des inverses des blocs diagonaux de A de même indice.

5.5.60. Trouver l'inverse d'une matrice A de type $k+l$

$$A=\left\| \begin{matrix} E_k & B \\ 0 & E_l \end{matrix} \right\|.$$

5.5.61*. Soit une sous-matrice A de la matrice décomposée en blocs

$$M=\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\|,$$

carrée et non dégénérée. Démontrer que le déterminant de la matrice M vérifie la relation

$$|M|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

5.5.62*. On connaît l'inverse A_{n-1}^{-1} d'une matrice A_{n-1} de type $n-1$. Trouver l'inverse de la matrice ***bordée*** A_n d'ordre n

$$A_n=\left\| \begin{matrix} A_{n-1} & u_{n-1} \\ v_{n-1} & a \end{matrix} \right\|,$$

en la supposant non dégénérée.

5.5.63. Calculer le nombre de multiplications et de divisions nécessaires pour réaliser les formules de calcul de A_n^{-1} déduites dans le problème 5.5.62.

5.5.64. Vérifier que pour une matrice carrée M d'ordre $k+l$ décomposée en blocs

$$M=\left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\|,$$

où A et D sont des blocs carrés d'ordre k et l respectivement, l'inverse M^{-1} peut se construire également sous une forme partitionnée

$$M^{-1}=\left\| \begin{matrix} P & Q \\ R & S \end{matrix} \right\|,$$

où $P=(A-BD^{-1}C)^{-1}$, $Q=-PBD^{-1}$, $R=-D^{-1}CP$, $S=D^{-1}-D^{-1}CQ$ ou

$$S=(D-CA^{-1}B)^{-1}, \quad R=-SCA^{-1},$$
$$P=A^{-1}-A^{-1}BR, \quad Q=-A^{-1}BS.$$

Les inverses indiquées ci-dessus sont supposées existantes. Ces *formules de Frobenius* permettent de réduire le calcul de l'inverse d'ordre $k+l$ à l'inversion d'une matrice d'ordre k et d'une matrice d'ordre l.

5.5.65. Soient A et B des matrices non dégénérées d'ordre m et n respectivement. Démontrer que le produit kroneckerien de ces matrices est également non dégénéré et que

$$(A\times B)^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}.$$

Trouver les inverses des matrices suivantes :

5.5.66. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.67. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

5.5.68. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.69*. $$\begin{Vmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 \end{Vmatrix}.$$

5.5.70. Soient $A=B+iC$ une matrice complexe d'ordre n; $A^{-1}=F+iG$ l'inverse de la matrice A. Démontrer que les matrices réelles d'ordre $2n$

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} F & -G \\ G & F \end{pmatrix}$$

sont inverses réciproquement.

5.5.71. Démontrer que la transposition et l'inversion d'une matrice sont commutables, c'est-à-dire $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

5.5.72. Une matrice carrée A a comme éléments les fonctions réelles dérivables d'une variable réelle t. Démontrer la formule en supposant que pour une valeur donnée de t la matrice A est non dégénérée

$$\frac{d}{dt}(A^{-1})=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

5.5.73. Montrer que la solution d'un système d'équations linéaires $Ax=b$ à matrice carrée non dégénérée des coefficients de A est $x=A^{-1}b$. En déduire les formules de Cramer.

5.5.74. Supposons que dans l'énoncé du problème 5.5.73 les coefficients de la matrice A et du vecteur colonne b soient des fonctions réelles dérivables de la variable réelle t. Démontrer la formule

$$\frac{dx}{dt}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}x+A^{-1}\frac{db}{dt}.$$

5.5.75. Soient A et B des matrices rectangulaires de types $m\times n$ et $n\times p$ respectivement. Démontrer que les mineurs de la matrice $C=AB$ vérifient les expressions

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_q \\ j_1 & j_2 \dots & j_q \end{pmatrix}=\sum_{1\leq k_1<k_2\dots<k_q\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \dots & k_q \\ j_1 & j_2 \dots & j_q \end{pmatrix}$$

$$(1\leq i_1<i_2<\dots<i_q\leq m;\quad 1\leq j_1<j_2<\dots<j_q\leq p).$$

5.5.76. Démontrer en utilisant la formule de Binet-Cauchy que le rang de chacune des matrices AA^T et A^TA est égal au rang de la matrice A. On admet que A est une matrice réelle.

5.5.77. Démontrer que, pour les matrices rectangulaires A et B de type $m\times n$ et $n\times m$ respectivement, la somme de tous les mineurs d'ordre k donné ($1\leq k\leq \min(n, m)$) des matrices AB et BA est la même.

5.5.78. Une matrice carrée est dite *totalement non négative* (resp. *totalement positive*) si tous les mineurs de types quelconques de cette matrice sont non négatifs (resp. positifs). Démontrer que le produit des matrices totalement non négatives (resp. totalement positives) est lui-même une matrice totalement non négative (resp. totalement positive).

5.5.79*. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour un nombre naturel donné p, $1\leq p\leq n$, ordonnons tous les $N=C_n^p$ combinaisons de n nombres $1, 2, \dots, n$ à p nombres $k_1<k_2\dots<k_p$ dans un ordre lexicographique. Ceci signifie que la combinaison $k_1<k_2<\dots<k_p$ précède la combinaison $k'_1<k'_2<\dots<k'_p$, si $k_1=k'_1, \dots, k_{l-1}=k_{l-1}$, mais $k_l<k'_l$, $1\leq l\leq p$. Composons la matrice carrée $A_p=(a_{ij;\,p})$ d'ordre N de la façon suivante

$$a_{ij;\,p}=A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\dots i_p \\ j_1 & j_2\dots j_p \end{pmatrix},$$

si l'indice de la combinaison $i_1<i_2<\dots<i_p$ est i, et l'indice de la combinaison

$j_1<j_2<\ldots<j_p$ est j. La matrice obtenue A_p s'appelle p-ième matrice *associée* à A. En particulier, $A_1=A$, $A_n=|A|$.

Démontrer que

a) $(E_n)_p=E_N$;

b) la matrice associée d'une matrice diagonale est elle-même une matrice diagonale;

c) la matrice associée d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) A est elle-même une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure);

d) $(AB)_p=A_pB_p$;

e) si A est une matrice non dégénérée, alors $(A^{-1})_p=(A_p)^{-1}$.

5.5.80*. Soit A une matrice non dégénérée d'ordre n. Démontrer que les mineurs d'un ordre quelconque de l'inverse $B=A^{-1}$ sont associés aux mineurs de A par les relations

$$B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 \ldots & k_p \end{pmatrix}=\frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k_1' & k_2' \ldots & k_{n-p}' \\ i_1' & i_2' \ldots & i_{n-p}' \end{pmatrix}}{|A|}$$

où $i_1<i_2<\ldots<i_p$ avec $i_1'<i_2'<\ldots<i_{n-p}'$ et $k_1<k_2<\ldots<k_p$ avec $k_1'<k_2'<\ldots<k_{n-p}'$ forment un système complet d'indices $1, 2, \ldots, n$.

§ 5.6. Matrice d'un opérateur linéaire, passage à une autre base, matrices équivalentes et semblables

Présentation des problèmes du paragraphe. Les problèmes ci-dessous sont groupés en trois sections suivant les sujets indiqués par le titre du paragraphe.

5.6.1. L'orientation adoptée sur un plan euclidien P est une orientation à droite (c'est-à-dire le repérage des angles est considéré comme positif s'il est orienté dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre). Soit Oe_1e_2 un système de coordonnées cartésien à droite sur le plan E_2. Composer pour la base e_1, e_2 la matrice de transformation linéaire qui consiste en une rotation de E_2 d'un angle α sur l'origine des coordonnées.

5.6.2. Soit e_1, e_2, e_3 une base orthonormée à droite d'un espace euclidien tridimensionnel E_3 des vecteurs géométriques. Considérons l'opérateur linéaire A de E_3 suivant :

$$Ax=[x, a].$$

Ici a est le vecteur fixé de coordonnées α, β, γ dans la base e_1, e_2, e_3. Trouver dans cette base la matrice de A.

5.6.3. Ecrire les matrices a) de l'opérateur de dérivation; b) de l'opérateur de différences Δ_1, pour une base $1, t, t^2, \ldots, t^n$ de l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$.

5.6.4. En considérant un opérateur de dérivation comme un opérateur de M_n dans M_{n-1}, écrire sa matrice dans un couple de bases $1, t, t^2, \ldots, t^n$ et $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. Trouver dans ce même couple de bases un opérateur d'intégration comme un opérateur de M_{n-1} dans M_n.

5.6.5. Trouver la matrice d'un opérateur de dérivation dans un espace vectoriel bidimensionnel tendu sur les fonctions de base

a) $f_1(t)=\cos t$, $f_2(t)=\sin t$;

b) $g_1(t)=e^{at}\cos bt$, $g_2(t)=e^{at}\sin bt$.

5.6.6. Un espace X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. La base $e_1, \ldots, e_n$ est choisie de façon que les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ forment une base du sous-espace L_1 et les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ une base du sous-espace L_2. Composer pour la base $e_1, \ldots, e_n$:

a) la matrice de l'opérateur de projection sur L_1 parallèlement à L_2;

b) la matrice de l'opérateur de projection sur L_2 parallèlement à L_1;

c) la matrice de l'opérateur de réflexion dans L_1 parallèlement à L_2.

5.6.7. Dans un espace arithmétique X de dimension n réel ou complexe et dans un espace arithmétique Y de dimension m correspondant sont fixées des bases « naturelles » composées de vecteurs unités de ces espaces. Faisons correspondre à chaque matrice A de type $m\times n$ un opérateur $\tilde{A}$ de X dans Y défini de la façon suivante :

$$x \xrightarrow{\tilde{A}} y=Ax,$$

c'est-à-dire consistant à multiplier chaque vecteur colonne x de X par la matrice A. Démontrer que a) cette correspondance entre les matrices $m\times n$ et les opérateurs de X dans Y est biunivoque; b) dans le couple de bases naturelles la matrice de l'opérateur $\tilde{A}$ coïncide avec la matrice A. Ainsi, les opérateurs qui agissent dans des espaces arithmétiques peuvent être identifiés à des matrices rectangulaires de type correspondant.

5.6.8. Un opérateur A qui agit dans un espace arithmétique tridimensionnel transforme les vecteurs linéairement indépendants a_1, a_2, a_3 en vecteurs b_1, b_2, b_3, où

$$a_1=\begin{Vmatrix}5\\3\\1\end{Vmatrix},\quad a_2=\begin{Vmatrix}1\\-3\\-2\end{Vmatrix},\quad a_3=\begin{Vmatrix}1\\2\\1\end{Vmatrix};\quad b_1=\begin{Vmatrix}-2\\1\\0\end{Vmatrix},$$

$$b_2=\begin{Vmatrix}-1\\3\\0\end{Vmatrix},\quad b_3=\begin{Vmatrix}-2\\-3\\0\end{Vmatrix}.$$

Trouver la matrice de cet opérateur a) dans la base a_1, a_2, a_3; b) dans la base naturelle e_1, e_2, e_3.

5.6.9. La base composée de matrices

$$\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$$

(dans l'ordre indiqué) est fixée dans l'espace des matrices carrées d'ordre 2. Ecrire dans cette base :

a) la matrice d'un opérateur de transposition, c'est-à-dire d'un opérateur qui à chaque matrice X associe une matrice transposée;

b) la matrice d'un opérateur G_{AB} qui transforme chaque matrice X en une matrice AXB, où A et B sont des matrices données;

c) la matrice de l'opérateur F_{AB} défini par la relation

$$X \to AX + XB.$$

Comment changent ces matrices, si dans la base on permute les matrices

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}?$$

5.6.10. Soit dans l'espace des matrices de type $m \times n$ une base E_{11}, $E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn}$ (dans l'ordre indiqué), où E_{ij} est une matrice de type $m \times n$ dont le seul élément différent de zéro se trouve dans la case (i, j) et vaut l'unité. Soient, ensuite, A et B les matrices carrées données d'ordre m et n respectivement. Considérons les opérateurs G_{AB} et F_{AB} définis par les relations

$$X \xrightarrow{G_{AB}} AXB,$$

$$X \xrightarrow{F_{AB}} AX + XB.$$

Démontrer que dans la base donnée

a) la matrice de l'opérateur G_{AB} est un produit kroneckerien $A \times B^T$;

b) la matrice de l'opérateur F_{AB} est $A \times E_n + E_m \times B^T$.

Trouver les matrices de ces mêmes opérateurs dans la base $E_{11}, E_{21}, \ldots$ $\ldots, E_{m1}, E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{m2}, E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{mn}$.

5.6.11. Soit A un opérateur de ω_{XY}. Démontrer que toutes les matrices qui définissent l'opérateur A dans de différents couples de bases des espaces X et Y ont le même rang égal à celui de A.

5.6.12. Trouver le rang de l'opérateur F_{AB} :

$$X \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6.13. Démontrer que l'opérateur F_{AB} du problème 5.3.12 est nilpotent et trouver l'indice de sa nilpotence.

5.6.14. Que peut-on dire de la matrice de l'opérateur A de rang r, si dans une base $e_1, \ldots, e_n$ d'un espace X les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ appartiennent au noyau de cet opérateur?

5.6.15*. Un opérateur A de ω_{XY} est de rang r. Démontrer que dans les espaces X, Y on peut choisir des bases $e_1, \ldots, e_n$ et $q_1, \ldots, q_m$ respectivement de façon que la matrice A_{qe} de A soit de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.6.1)$$

Le nombre de colonnes non nulles de la matrice A_{qe} est égal au rang r de l'opérateur.

5.6.16. Montrer que toute matrice non dégénérée d'ordre n réelle ou complexe peut être considérée comme une matrice qui donne dans un espace X de dimension n réel ou complexe respectivement le passage d'une base $e_1, \ldots, e_n$ à une autre base $f_1, \ldots, f_n$, le choix de l'une de ces bases pouvant être arbitraire.

5.6.17. Supposons que la matrice A définit le passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ à la base $f_1, \ldots, f_n$, et la matrice B, de la base $f_1, \ldots, f_n$ à la base $g_1, \ldots, g_n$. Montrer que a) la matrice de passage de $f_1, \ldots, f_n$ à $e_1, \ldots, e_n$ est A^{-1}; b) la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_n$ à $g_1, \ldots, g_n$ est $C=AB$.

5.6.18. Comment change la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_n$ à $f_1, \ldots, f_n$ si

a) on commute les vecteurs e_1 et e_j;

b) on commute les vecteurs f_k et f_l?

5.6.19. Dans la base $1, t, t^2$ de l'espace M_2 l'opérateur A est défini par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Trouver la matrice de cet opérateur dans la base composée des polynômes $3t^2+2t$; $5t^2+3t+1$; $7t^2+5t+3$.

5.6.20. Deux opérateurs sont donnés dans l'espace M_3. L'opérateur A transforme tout polynôme $a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ en polynôme $a_0+a_1t+a_2t^2$. L'opérateur B transforme les polynômes t^3+t^2, t^3+t, t^3+1, t^3+t^2+t+1 en t^3+t, t^3+1, t^3+t^2+t+1 respectivement et en un polynôme nul. Composer dans la base $1, t, t^2, t^3$ les matrices des opérateurs AB et BA.

5.6.21. Soient P et Q des matrices non dégénérées d'ordre m et n respectivement. Montrer que les matrices $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{1n}, F_{21}, F_{22}, \ldots, F_{mn}$, où $F_{ij}=PE_{ij}Q$ et E_{ij}, matrices définies dans 5.6.10, forment une base dans l'espace des matrices de type $m\times n$. Trouver la matrice de passage à cette base à partir de la base composée de matrices E_{ij} et la matrice de passage inverse.

5.6.22. Trouver les matrices des opérateurs G_{AB} et F_{AB} du problème 5.6.10 dans la base $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{mn}$ (cf. problème 5.6.21).

5.6.23. Soient $\tilde{A}_1$ l'opérateur défini par la matrice carrée A d'ordre $n\times n$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace X, $\tilde{A}_2$ l'opérateur défini par la même matrice dans la base $f_1, \ldots, f_n$. Démontrer que

$$\tilde{A}_2=P\tilde{A}_1P^{-1},$$

où P est un opérateur qui transforme les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ en vecteurs $f_1, \ldots, f_n$.

5.6.24. Les matrices rectangulaires A et B de type $m\times n$ sont dites *équivalentes* s'il existe des matrices non dégénérées R et S telles que $B=RAS$. Montrer que la relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices rectangulaires de type fixé $m\times n$ est réflexive, symétrique et transitive.

5.6.25. On dit que les matrices carrées A et B sont *semblables* s'il existe une matrice non dégénérée P telle que $B=P^{-1}AP$. On dit encore que la

matrice P *transforme* A en B. Montrer que la relation de similitude sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre donné r est réflexive, symétrique et transitive.

5.6.26. Montrer que deux matrices équivalentes (semblables) quelconques sont de même rang.

5.6.27. Soient X et Y des espaces de dimension n et m respectivement. Démontrer que deux matrices équivalentes quelconques A et B de type $m\times n$ peuvent être considérées comme deux matrices qui définissent le même opérateur de ω_{XY} dans certains couples de bases $e_1, \ldots, e_n$; $q_1, \ldots, q_m$ et $f_1, \ldots, f_n$; $t_1, \ldots, t_m$ de ces espaces. L'un des couples de ces bases peut être arbitraire.

5.6.28. Démontrer que deux matrices semblables quelconques d'ordre n peuvent être considérées comme des matrices qui définissent le même opérateur d'un espace X de dimension n dans les deux bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ de cet espace. Le choix de l'une des bases est arbitraire.

5.6.29*. Démontrer que toute matrice A est équivalente à une matrice de la forme (5.6.1).

5.6.30. Démontrer la réciproque du problème 5.6.26 : deux matrices A et B de type $m\times n$ de même rang sont équivalentes.

5.6.31. Soient deux matrices semblables A et B : $B=P^{-1}AP$. La matrice de transformation P est-elle définie d'une façon univoque?

5.6.32*. Montrer qu'une matrice scalaire αE n'est semblable qu'à elle-même. Démontrer que c'est une propriété dont jouissent seulement les matrices scalaires.

5.6.33. Soit A la matrice carrée fixée. Démontrer que l'ensemble des matrices P qui transforment A en A est un groupe multiplicatif.

5.6.34. Soient A et B des matrices semblables. Démontrer que si P_0 est une matrice qui transforme A en B, l'ensemble des matrices de transformation s'obtient sur l'ensemble des matrices de transformation de A en A en multipliant à droite ces matrices par la matrice P_0.

5.6.35. Montrer que si une matrice A subit des transformations suivantes :

a) la i-ième ligne est multipliée par un nombre non nul α, puis la i-ième colonne est multipliée par un nombre $1/\alpha$;

b) la j-ième colonne est multipliée par un nombre α et ajoutée à la i-ième ligne, puis de la j-ième colonne on retranche la i-ième colonne multipliée par α;

c) on commute les i-ième et j-ième lignes, puis les i-ième et j-ième colonnes,

elle se transforme en une matrice semblable.

5.6.36*. Montrer que la symétrie d'une matrice par rapport à son centre est une transformation de similitude de cette matrice.

5.6.37. Démontrer que les matrices semblables A et B ont les mêmes trace et déterminant.

5.6.38. Démontrer que si au moins une des deux matrices carrées A et B de même rang est non dégénérée, les matrices AB et BA sont semblables.

Donner un exemple des matrices dégénérées A et B telles que AB et BA ne soient pas semblables.

5.6.39. Montrer que si les matrices A et B sont semblables, on a

a) des matrices semblables A^2 et B^2;

b) des matrices semblables A^k et B^k pour tout nombre entier naturel k;

c) des matrices semblables $f(A)$ et $f(B)$ quel que soit le polynôme $f(t)$.

5.6.40. Si les matrices A et B d'ordre $n\times n$ sont équivalentes, cela signifie-t-il que les matrices A^2 et B^2 le sont aussi (cf. problème (5.6.39, a))?

5.6.41. Montrer que les matrices semblables A et B ont le même polynôme minimal.

5.6.42. Les matrices A et B d'ordres m et n sont semblables aux matrices C et D respectivement. Démontrer que

a) la matrice $A\times B$ est semblable à la matrice $C\times D$;

b) la matrice $A\times E_n+E_m\times B^T$ est semblable à la matrice $C\times E_n+$ $+E_m\times D^T$.

5.6.43. Démontrer que si les matrices A et B sont semblables, leurs associées A_p et B_p le sont aussi.

5.6.44. Montrer que si les matrices complexes $A_1=B_1+iC_1$ et $A_2=$ $=B_2+iC_2$ sont semblables, les matrices réelles D_1 et D_2

$$D_i=\begin{Vmatrix} B_i & -C_i \\ C_i & B_i \end{Vmatrix}, \quad i=1, 2,$$

le sont aussi.

CHAPITRE 6

STRUCTURE DE L'OPÉRATEUR LINÉAIRE

§ 6.0. Terminologie et généralités

Soit A un opérateur de ω_{XX}. Le nombre λ s'appelle *valeur propre* de l'opérateur A s'il existe un vecteur non nul x tel que

$$Ax=\lambda x. \tag{6.0.1}$$

Tout vecteur $x\neq 0$ qui satisfait à (6.0.1) s'appelle *vecteur propre* de l'opérateur A associé à la valeur propre λ.

Si A_e est la matrice de A dans une base arbitraire $e_1, \ldots, e_n$ d'un espace X, le polynôme det $(\lambda E-A)$ ne dépend pas du choix d'une base et s'appelle *polynôme caractéristique* de l'opérateur A.

Un opérateur a comme valeurs propres les racines du polynôme caractéristique (racines appartenant au corps donné) et elles seules.

D'après le *théorème fondamental de l'algèbre* tout polynôme de degré $n(n\geq 1)$ à coefficients complexes possède dans le corps des nombres complexes exactement n racines (chaque racine étant prise avec son ordre de multiplicité). Si on appelle *multiplicité algébrique d'une valeur propre* sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique, alors

dans un espace vectoriel complexe de dimension n tout opérateur possède n valeurs propres (compte tenu de la multiplicité). Dans ces conditions, *il existe au moins un vecteur propre.*

Le sous-espace L est dit *invariant par rapport à l'opérateur A* si $x\in L$ entraîne que $Ax\in L$. L'opérateur A associé seulement aux vecteurs du sous-espace invariant L s'appelle *opérateur induit* noté A/L.

Si le sous-espace X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2 invariants par rapport à l'opérateur A, pour tout vecteur x de décomposition

$$x=x_1+x_2, \quad x_1\in L_1, \quad x_2\in L_2,$$

on a

$$Ax=Ax_1+Ax_2=(A/L_1)x_1+(A/L_2)x_2.$$

C'est pourquoi on dit que A est *somme directe* des opérateurs induits A/L_1 et A/L_2. Cette situation se définit en disant : l'opérateur A est *réduit* par un couple de sous-espaces L_1 et L_2.

Pour tout opérateur A qui agit dans un espace complexe il existe une

base de cet espace appelée *base canonique de Jordan*, dans laquelle la matrice de l'opérateur est d'une forme quasi diagonale

$$J=\begin{Vmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{Vmatrix},$$

où chacun des blocs diagonaux J_i est une cellule de Jordan associée à l'une des valeurs propres de A. La matrice J s'appelle *forme de Jordan* de l'opérateur A.

Les expressions « vecteur propre d'une matrice », « sous-espace invariant d'une matrice », etc., employées dans le présent chapitre doivent être entendues dans le sens défini au § 5.0. De plus, par exemple, un vecteur propre d'une matrice $n \times n$ est considéré comme un vecteur colonne de dimension n, etc.

§ 6.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous donnons ici des problèmes sur les valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur, qui peuvent être résolus sans faire appel au polynôme caractéristique. Ces problèmes sont associés surtout aux questions suivantes :

1. Détermination des valeurs propres et des vecteurs propres.
2. Théorème de l'indépendance linéaire des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres et ses corollaires.
3. Opérateurs et matrices de structure simple.

6.1.1. Démontrer que pour qu'un opérateur A soit non dégénéré il faut et il suffit qu'il n'ait pas de valeur propre nulle.

6.1.2. Montrer que a) les vecteurs propres d'un opérateur A associés à la valeur propre nulle, et eux seuls, appartiennent au noyau de cet opérateur; b) les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles appartiennent à l'image de l'opérateur.

6.1.3. Démontrer que si un opérateur A est non dégénéré, alors les vecteurs propres de A et de A^{-1} sont les mêmes. Trouver la relation entre les valeurs propres de ces opérateurs.

6.1.4. Montrer que dans la multiplication d'un opérateur par un nombre non nul les vecteurs propres ne changent pas, alors que les valeurs propres sont multipliées par ce nombre.

6.1.5. Montrer que, quel que soit le nombre λ_0, l'opérateur $A-\lambda_0 E$ possède les mêmes vecteurs propres que l'opérateur A. Trouver la relation entre les valeurs propres de ces opérateurs.

6.1.6. Démontrer que si x est un vecteur propre de l'opérateur A associé à la valeur propre λ, x est également un vecteur propre de l'opérateur a) A^2; b) A^k, pour tout k naturel; c) $f(A)$, où $f(t)$ est un polynôme quelconque. Trouver les valeurs propres correspondantes de ces opérateurs.

6.1.7. La proposition qui suit : si x est un vecteur propre d'un certain polynôme $f(A)$ d'un opérateur A, x est un vecteur propre de l'opérateur A lui-même, est-elle vraie?

6.1.8. Démontrer qu'un opérateur nilpotent ne possède pas de valeurs propres différentes de zéro.

6.1.9. Démontrer qu'un opérateur de rotation d'un espace euclidien d'un angle α non multiple de π ne possède pas de vecteurs propres.

6.1.10. Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur A d'un espace euclidien tridimensionnel : $Ax=[x, a]$, où a est le vecteur fixé.

6.1.11. Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres d'un opérateur de dérivation dans l'espace des polynômes M_n.

6.1.12. Trouver les vecteurs propres d'un opérateur de dérivation sur l'espace tendu sur $f_1(t)=\cos t$, $f_2(t)=\sin t$.

6.1.13. Démontrer que les valeurs propres d'une matrice diagonale coïncident avec ses éléments diagonaux.

6.1.14. Démontrer que la valeur propre d'une matrice stochastique est l'unité. Trouver le vecteur propre correspondant.

6.1.15*. Trouver les valeurs propres de la matrice $A=xy$ dont le rang est l'unité.

6.1.16. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice J_n d'ordre $n\times n$

$$J_n=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.1.17. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A d'ordre $n\times n$

$$A=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

6.1.18. Démontrer que si les matrices A et B sont semblables, toute valeur propre de A est également une valeur propre de B, et inversement. Trouver la relation entre les vecteurs propres des matrices A et B.

6.1.19*. Démontrer que les vecteurs propres d'un opérateur associés aux valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

6.1.20. Déduire du résultat du problème 6.1.19 qu'un opérateur A qui agit dans un espace X de dimension n ne peut posséder plus de n valeurs propres distinctes. Si le nombre de valeurs propres distinctes est exactement n, il existe une base de l'espace X composée de vecteurs propres de l'opérateur A.

6.1.21. Démontrer que si l'ensemble des vecteurs propres d'un opérateur A associés à la valeur propre donnée λ_0 est complété de vecteur nul, il

engendre un sous-espace. Ce dernier s'appelle *sous-espace propre* de l'opérateur A associé à la valeur propre λ_0.

6.1.22. L'espace X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres

a) d'un opérateur de projection sur L_1 parallèlement à L_2;
b) d'un opérateur de réflexion dans L_1 parallèlement à L_2.

6.1.23. La dimension du sous-espace propre d'un opérateur A associé à la valeur propre λ_0 s'appelle *multiplicité géométrique* de la valeur propre λ_0. Montrer que la multiplicité géométrique de λ_0 est égale au défaut de l'opérateur $A-\lambda_0 E$.

6.1.24. Démontrer que la somme des sous-espaces propres d'un opérateur A est somme directe.

6.1.25. Démontrer que tous les vecteurs différents de zéro d'un espace sont les vecteurs propres d'un opérateur A si et seulement si A est un opérateur scalaire.

6.1.26*. Démontrer que la somme des multiplicités géométriques de toutes les valeurs propres d'un opérateur A de ω_{XX} ne dépasse pas la dimension de l'espace X. De plus, l'égalité de cette somme à la dimension de l'espace X est nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans X une base composée de vecteurs propres de A.

6.1.27. Un opérateur A est dit de *structure simple* s'il existe dans l'espace une base composée de ses vecteurs propres. Quel est le sens géométrique d'un tel opérateur? Quelle est la forme de sa matrice dans la base composée de vecteurs propres?

6.1.28. On dit qu'une matrice carrée est de *structure simple* si elle est semblable à une certaine matrice diagonale. Démontrer qu'un opérateur A de ω_{XX} est de structure simple si et seulement si sa matrice dans une base arbitraire de l'espace est une matrice de structure simple.

6.1.29. Démontrer que pour un opérateur de structure simple a) l'image est l'enveloppe linéaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles; b) l'intersection du noyau et de l'image se compose du vecteur nul.

6.1.30. Montrer que les opérateurs de projection et les opérateurs de réflexion sont de structure simple.

6.1.31. Montrer que parmi les opérateurs nilpotents il n'y a que l'opérateur nul qui a une structure simple.

6.1.32. Démontrer que tout polynôme $f(A)$ d'un opérateur de structure simple est lui-même de structure simple. En particulier, si A est non dégénéré, A^{-1} est de structure simple.

6.1.33. Démontrer que si un opérateur A d'un espace de dimension n est un opérateur de structure simple, le degré du polynôme minimal de cet opérateur ne dépasse pas n.

6.1.34. Un opérateur A qui agit dans un espace X de dimension n possède n valeurs propres distinctes. Démontrer que tout opérateur B commutant avec A est un opérateur de structure simple.

6.1.35. Montrer que dans l'énoncé du problème 6.1.34 l'opérateur B peut être mis sous la forme d'un polynôme de l'opérateur A.

6.1.36. Soient A un opérateur de l'espace réel R, $\hat{A}$ l'opérateur déduit de A par complexification de l'espace R. Montrer que si x est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ, $x+i0$ est un vecteur propre de $\hat{A}$ de même valeur propre.

6.1.37. Montrer que si dans l'énoncé du problème 6.1.36 A est un opérateur de structure simple, $\hat{A}$ est également de structure simple.

6.1.38. Par définition, il existe pour une matrice A de structure simple une matrice non dégénérée P telle que $P^{-1}AP=\Lambda$ soit une matrice diagonale. Démontrer que les éléments diagonaux de la matrice Λ sont des valeurs propres, et les colonnes de la matrice P, des vecteurs propres de la matrice A. Inversement, une matrice non dégénérée P composée (suivant les colonnes) de vecteurs propres de la matrice A transforme cette matrice en une matrice diagonale.

6.1.39. Montrer que si A est une matrice de structure simple, il en est de même pour sa transposée A^T.

6.1.40. Soient λ et x la valeur propre et le vecteur propre correspondant d'une matrice A d'ordre $m\times m$; μ et y, la valeur propre et le vecteur propre correspondant d'une matrice B d'ordre $n\times n$. Démontrer que le produit kroneckerien $x\times y$ est

a) un vecteur propre de la matrice $A\times B$;

b) un vecteur propre de la matrice $A\times E_n+E_m\times B$. Trouver les valeurs propres correspondantes.

6.1.41. Démontrer que si dans l'énoncé du problème 6.1.40 les matrices A et B sont de structure simple, c'est vrai également pour les matrices $A\times B$ et $A\times E_n+E_m\times B$.

6.1.42. Déduire du problème 6.1.41 le corollaire suivant : si les matrices A et B sont de structure simple, alors G_{AB} et E_{AB} du problème 5.6.10 sont également des opérateurs de structure simple.

6.1.43. Démontrer que si A est une matrice de structure simple, c'est également vrai pour toutes les matrices associées A_p.

§ 6.2. Polynôme caractéristique

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce qui suit nous voulons illustrer les questions suivantes relatives au polynôme caractéristique.

1. Détermination du polynôme caractéristique, expression de ses coefficients par les mineurs d'une matrice, relation entre les coefficients et les valeurs propres.
2. Polynôme caractéristique comme un outil de calcul des valeurs propres.
3. Matrice associée à un polynôme.
4. Polynômes caractéristiques des classes spéciales d'opérateurs et de matrices.

De même qu'au paragraphe précédent, nous nous attachons dans une grande mesure à examiner les opérateurs et les matrices de structure simple. Ce n'est qu'ici, une fois que l'on dispose d'un mode de calcul des valeurs propres, que prend toute sa valeur le critère établi dans le problème 6.1.26.

6.2.1. Ecrire les expressions explicites des polynômes caractéristiques des matrices d'ordre a) 1; b) 2; c) 3.

6.2.2*. Démontrer que dans l'écriture du polynôme caractéristique $|\lambda E-A|$ d'une matrice A suivant les puissances de λ :

$$|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0,$$

le coefficient a_k est égal à la somme de tous les mineurs principaux d'ordre $n-k$ de la matrice A, prise avec le signe $(-1)^{n-k}$.

Composer les polynômes caractéristiques des matrices

6.2.3. $$\begin{Vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{Vmatrix}.$$

6.2.4. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & a \end{Vmatrix}.$$

6.2.5. Démontrer que le polynôme caractéristique de la transposée A^T coïncide avec le polynôme caractéristique de la matrice A.

6.2.6. Prouver que si chaque coefficient d'une matrice complexe A est remplacé par un nombre conjugué, les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice sont remplacés par les nombres conjugués.

6.2.7*. A et B sont des matrices carrées de même ordre. Démontrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

6.2.8. Démontrer que les polynômes caractéristiques $f(\lambda)$ d'une matrice A et $g(\lambda)$ d'une matrice $A-\lambda_0E$ sont liés par la relation

$$g(\lambda)=f(\lambda+\lambda_0).$$

6.2.9. Soit une matrice non dégénérée A d'ordre $n\times n$. Démontrer que les polynômes caractéristiques $f(\lambda)$ de A et $h(\lambda)$ de A^{-1} sont liés par la relation

$$h(\lambda)=(-\lambda)^n\frac{1}{|A|}\cdot f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

En déduire la relation entre les sommes de tous les mineurs principaux de l'ordre donné des matrices A et A^{-1}. (Une autre méthode pour obtenir cette relation est donnée dans le problème 5.5.80.)

6.2.10. Démontrer que les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Donner un exemple qui montre que la réciproque : les matrices de même polynôme caractéristique sont semblables, n'est pas vraie.

6.2.11*. Démontrer que la fonction suivante des éléments d'une matrice A :

$$m(A)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji},$$

ne change pas sous l'effet d'une transformation de similitude de cette matrice.

6.2.12. En supposant que dans le problème 6.2.11 la matrice A est complexe, écrire l'expression de la fonction $m(A)$ à l'aide des valeurs propres de cette matrice.

6.2.13. En généralisant la proposition du problème 6.2.11, démontrer que la fonction

$$m_l(A)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\dots\sum_{k_l=1}^{n}a_{lk_1}a_{k_1k_2}\dots a_{k_{l-1}k_l}a_{k_ll}$$

ne change pas sous l'effet d'une transformation de similitude de la matrice A.

6.2.14. On connaît n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ d'une matrice A de type $n+1$. Comment trouver encore une valeur propre λ_{n+1}?

6.2.15. Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice triangulaire

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

6.2.16. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice

$$C(f(\lambda))=\begin{Vmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

est égal à $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0$. La matrice $C(f(\lambda))$ s'appelle *matrice associée au polynôme* $f(\lambda)$ (ou *matrice de Frobenius*).

6.2.17. En appliquant le problème 6.2.16 montrer que tout polynôme de degré n à coefficient dominant égal à un peut être polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n.

6.2.18. Trouver le polynôme caractéristique de l'opérateur de rotation d'un angle α d'un plan euclidien.

6.2.19. Trouver le polynôme caractéristique d'un opérateur A de l'espace euclidien tridimensionnel : $Ax=[x, a]$, où a est un vecteur fixé.

6.2.20. Trouver le polynôme caractéristique d'un opérateur de dérivation de l'espace M_n.

6.2.21. Trouver le polynôme caractéristique d'un opérateur nilpotent arbitraire qui agit dans un espace complexe de dimension n.

6.2.22. Démontrer que le rang d'un opérateur de projection est égal à sa trace.

6.2.23. Supposons que l'opérateur R réalise la réflexion d'un espace X de dimension n par rapport au sous-espace L. Démontrer que la dimension de L est liée à la trace de R par la relation

$$\operatorname{tr} R=2\dim L-n.$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

6.2.24. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.2.25. $\begin{Vmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{Vmatrix}$.

6.2.26. $\begin{Vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.2.27. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

6.2.28. $\begin{Vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{Vmatrix}$.

6.2.29. $\begin{Vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.2.30. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.31. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.2.32. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.2.33. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.2.34. Démontrer que dans un espace réel de dimension $n=2k+1$ tout opérateur possède au moins un vecteur propre.

Trouver les valeurs propres des matrices suivantes a) dans le corps des nombres réels; b) dans le corps des nombres complexes.

6.2.35. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.2.36. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.2.37. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.2.38. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.39. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice quasi triangulaire (quasi diagonale) est égal au produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux.

6.2.40. En utilisant les problèmes 6.2.8 et 6.2.9 montrer que les multiplicités algébriques des valeurs propres correspondantes des opérateurs A et $A-\lambda_0 E$ sont les mêmes, ainsi que celles des valeurs propres correspondantes des opérateurs A et A^{-1}.

6.2.41*. Démontrer que pour un opérateur arbitraire A, la multiplicité géométrique de toute valeur propre λ ne dépasse pas sa multiplicité algébrique.

6.2.42. Démontrer qu'un opérateur A qui agit dans un espace complexe est de structure simple si et seulement si pour chaque valeur propre de cet opérateur la multiplicité géométrique coïncide avec la multiplicité algébrique. Une telle proposition est-elle vraie dans le cas d'un espace réel?

Etablir pour chacune des matrices ci-dessous si elle est de structure simple. Dans le cas de l'affirmative, trouver la matrice qui réduit la matrice donnée à une forme diagonale et indiquer cette forme.

6.2.43. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.44. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.45. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.2.46. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.2.47. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.2.48. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.49*. Si un polynôme $f(\lambda)$ possède au moins une racine multiple, sa matrice de Frobenius peut-elle être de structure simple?

6.2.50. Démontrer que les matrices A et B de structure simple sont semblables si et seulement si elles possèdent le même polynôme caractéristique.

6.2.51. Démontrer qu'une matrice complexe dont les valeurs propres sont toutes distinctes est semblable à la matrice de Frobenius de son polynôme caractéristique.

6.2.52. Trouver le polynôme caractéristique de la matrice P d'ordre n

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

6.2.53*. Trouver pour la matrice P du problème précédent les valeurs propres dans le corps des nombres complexes et les vecteurs propres qui leur correspondent.

6.2.54. En partant des résultats du problème 6.2.53 montrer que dans le corps des nombres complexes toute matrice circulante est de structure simple. Trouver l'expression des valeurs propres de la matrice circulante par ses éléments.

6.2.55*. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les racines du polynôme $f(\lambda)$ toutes distinctes. Trouver les vecteurs propres de la matrice de Frobenius de ce polynôme.

6.2.56*. Déduire le résultat du problème 6.2.53 à partir du problème 6.2.55.

6.2.57*. Soit une matrice A de structure simple. Démontrer que pour tout nombre λ_0 le rang d'une matrice $A-\lambda_0 E$ est égal au plus grand ordre des mineurs principaux de cette matrice différents de zéro.

6.2.58. Démontrer que tout opérateur de structure simple est annulé par son polynôme caractéristique.

6.2.59. Soient A un opérateur de structure simple agissant dans un espace de dimension n, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de l'opérateur A toutes distinctes. Trouver le polynôme minimal de cet opérateur.

6.2.60*. Soient A et B des matrices rectangulaires de types $m\times n$ et $n\times m$ respectivement. Démontrer que les polynômes caractéristiques des matrices AB et BA vérifient la relation

$$\lambda^n|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|\lambda E_n-BA|.$$

En particulier, pour $m=n$, on en tire le résultat du problème 6.2.7.

6.2.61*. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice

$$M=\begin{Vmatrix} A & B \\ B & A \end{Vmatrix},$$

où A et B sont des matrices carrées de même ordre, est égal au produit des polynômes caractéristiques des matrices $A+B$ et $A-B$.

6.2.62. Démontrer qu'en complexifiant un espace vectoriel réel on transforme l'opérateur A en opérateur $\hat{A}$ de même polynôme caractéristique.

6.2.63. Montrer que le résultat du problème 6.2.21 est également vrai pour un opérateur nilpotent qui agit dans un espace réel de dimension n.

6.2.64. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice réelle D d'ordre $2n$

$$D=\begin{Vmatrix} B & -C \\ C & B \end{Vmatrix}$$

est égal au produit des polynômes caractéristiques des matrices complexes $A=B+iC$ et $\bar{A}=B-iC$ de type $n\times n$.

§ 6.3. Sous-espaces invariants

Présentation des problèmes du paragraphe. La première partie de ce paragraphe est consacrée aux sous-espaces invariants et aux opérateurs induits. Dans sa deuxième partie nous traitons du théorème sur la possibilité de réduire une matrice d'opérateur à une forme triangulaire et des corollaires de ce théorème.

6.3.1. Démontrer que la somme et l'intersection des sous-espaces L_1 et L_2 invariants par rapport à un opérateur A sont également invariantes par rapport à A.

6.3.2. Montrer que le noyau et l'image d'un opérateur A de ω_{XX} sont invariants par rapport à A.

6.3.3. Démontrer que si un opérateur A est dégénéré, tout sous-espace contenant son image sera invariant par rapport à A.

6.3.4. Etablir le sens géométrique des sous-espaces invariants unidimensionnels d'un opérateur et montrer que dans un espace complexe tout opérateur possède au moins un sous-espace invariant unidimensionnel.

6.3.5. Que peut-on dire d'un opérateur A de ω_{XX} par rapport auquel tout sous-espace d'un espace X est invariant?

6.3.6*. Démontrer que si dans un espace X de dimension n tout sous-espace de dimension k, où k est un nombre naturel fixé, $1 \leq k < n$, est invariant par rapport à un opérateur A, alors A est un opérateur scalaire.

6.3.7. Démontrer que l'enveloppe linéaire d'un système de vecteurs propres quelconque d'un opérateur A est invariant par rapport à A. En particulier, les sous-espaces propres de l'opérateur A sont invariants par rapport à cet opérateur.

6.3.8. Prouver que les opérateurs A et $A-\lambda E$, où λ est un nombre quelconque, possèdent les mêmes espaces invariants.

6.3.9*. Démontrer que tout opérateur qui agit dans un espace complexe de dimension n possède un sous-espace invariant de dimension $n-1$.

6.3.10. Démontrer que si un opérateur A est non dégénéré, A et A^{-1} ont les mêmes sous-espaces invariants.

6.3.11. Montrer que tout sous-espace invariant par rapport à un opérateur A est invariant par rapport à tout polynôme de cet opérateur. La réciproque est-elle vraie?

6.3.12. Prouver que le noyau et l'image de tout polynôme $f(A)$ d'un opérateur A sont invariants par rapport à A.

6.3.13. Supposons que les opérateurs A et B soient commutables. Démontrer que le noyau et l'image de l'opérateur B sont invariants par rapport à l'opérateur A.

6.3.14. Démontrer que tout sous-espace propre d'un opérateur A est invariant par rapport à tout opérateur commutant avec A.

6.3.15. Démontrer que, si un opérateur A qui agit dans un espace de dimension n possède n valeurs propres distinctes, tout opérateur B commutable avec A est un opérateur de structure simple. De plus, tous les vecteurs propres de A sont également des vecteurs propres de B.

6.3.16. Trouver tous les sous-espaces invariants d'un opérateur A de

l'espace euclidien tridimensionnel : $Ax=[x, a]$, où a est le vecteur fixé. Déterminer pour chaque sous-espace invariant L l'opérateur induit A/L.

6.3.17*. Trouver tous les sous-espaces invariants d'un opérateur de dérivation dans l'espace des polynômes M_n.

6.3.18. Un espace X de dimension n est somme directe du sous-espace L_1 de dimension $k(>0)$ et du sous-espace L_2 de dimension $n-k$. Supposons qu'une base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace est choisie de sorte que les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ appartiennent à L_1, les vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$, à L_2. Mettons la matrice de l'opérateur A dans la base $e_1, \ldots, e_n$ sous la forme partitionnée

$$A_e=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

où A_{11} et A_{22} sont des sous-matrices carrées d'ordre k et $n-k$ respectivement. Démontrer que

a) $A_{21}=0$ si et seulement si L_1 est invariant par rapport à A;

b) $A_{21}=0$ et $A_{12}=0$ si et seulement si les deux sous-espaces L_1 et L_2 sont invariants par rapport à A.

6.3.19. Montrer que toute matrice carrée complexe A d'ordre n est semblable à la matrice B de la forme

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{Vmatrix},$$

où B_{22} est une sous-matrice d'ordre $n-1$. Indiquer le procédé de construction d'une matrice de transformation P telle que $B=P^{-1}AP$.

6.3.20. Démontrer que si un opérateur A agit dans un espace complexe, tout sous-espace invariant par rapport à A contient au moins un vecteur propre de cet opérateur.

6.3.21. Soit L un sous-espace invariant par rapport à un opérateur A. Démontrer que

a) le polynôme caractéristique de l'opérateur induit A/L est un diviseur du polynôme caractéristique de A;

b) le polynôme minimal de l'opérateur induit A/L est un diviseur du polynôme minimal de A.

6.3.22. Les sous-espaces L_1 et L_2 sont invariants par rapport à un opérateur A; de plus, $L_1 \subset L_2$. Démontrer que le polynôme caractéristique de l'opérateur A/L_1 est un diviseur du polynôme caractéristique de l'opérateur A/L_2. Une proposition analogue est vraie pour des polynômes minimaux.

6.3.23. Les sous-espaces L_1 et L_2 sont invariants par rapport à l'opérateur A. Démontrer que le polynôme caractéristique de l'opérateur $A/(L_1+L_2)$ et le polynôme caractéristique de l'opérateur $A/(L_1 \cap L_2)$ sont le multiple commun et le diviseur commun respectivement des polynômes caractéristiques des opérateurs A/L_1 et A/L_2. Une proposition analogue est vraie pour des polynômes minimaux.

6.3.24*. Démontrer qu'un opérateur A de structure simple induit sur chacun de ses sous-espaces invariants L un opérateur A/L également de structure simple.

6.3.25. Déduire du problème 6.3.24 le corollaire suivant : tout sous-espace invariant non trivial d'un opérateur A de structure simple est tendu sur un certain système de vecteurs propres de cet opérateur.

6.3.26. Démontrer que pour des opérateurs commutables A et B de structure simple il existe une base de l'espace composée de vecteurs propres communs à ces opérateurs.

6.3.27. Démontrer que deux opérateurs commutables quelconques d'un espace complexe possèdent un vecteur propre commun.

6.3.28. Démontrer que, pour tout ensemble G (quand bien même il serait infini) composé d'opérateurs deux à deux commutables d'un espace complexe, il existe un vecteur propre commun à tous les opérateurs de G.

6.3.29. Supposons qu'un opérateur A soit réduit par un couple de sous-espaces L_1 et L_2. Démontrer que

a) le rang de A est égal à la somme des opérateurs A/L_1 et A/L_2;

b) le polynôme caractéristique de A est égal au produit des polynômes caractéristiques des opérateurs A/L_1 et A/L_2;

c) le polynôme minimal de A est le plus petit commun multiple des polynômes minimaux de A/L_1 et A/L_2;

d) pour tout k entier, l'opérateur A^k est somme directe des opérateurs $(A/L_1)^k$ et $(A/L_2)^k$;

e) pour tout polynôme $f(t)$ l'opérateur $f(A)$ est somme directe des opérateurs $f(A/L_1)$ et $f(A/L_2)$.

6.3.30. Démontrer qu'un opérateur de dérivation dans l'espace M_n n'est réduit par aucun couple de sous-espaces.

6.3.31. Soient R l'espace vectoriel réel, C l'espace complexe obtenu de R par complexification. Supposons que L soit un sous-espace dans R invariant par rapport à un opérateur A; $e_1, \ldots, e_k$, une base de L. Montrer que l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_1+i0, \ldots, e_k+i0$ dans l'espace C est un sous-espace invariant par rapport à l'opérateur $\hat{A}$ associé à l'opérateur A.

6.3.32*. En appliquant la complexification démontrer que tout opérateur d'un espace vectoriel réel possède un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.

6.3.33. Trouver le sous-espace invariant bidimensionnel de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

envisagée comme un opérateur de l'espace arithmétique réel R_3.

6.3.34. Supposons que les vecteurs colonnes $z_1, \ldots, z_k$, $z_j=x_j+iy_j$ de dimension n forment une base du sous-espace invariant de dimension

k d'une matrice complexe $A=B+iC$. Démontrer que les vecteurs colonnes $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ de dimension $2n$, où

$$u_j=\left\|\begin{matrix} x_j \\ y_j \end{matrix}\right\|, \quad v_j=\left\|\begin{matrix} -y_j \\ x_j \end{matrix}\right\|,$$

engendrent une base du sous-espace invariant de dimension $2k$ de la matrice réelle

$$D=\left\|\begin{matrix} B & -C \\ C & B \end{matrix}\right\|.$$

6.3.35. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ forment une base du sous-espace invariant de dimension k d'une matrice d'ordre $m\times m$; les vecteurs $f_1, \ldots, f_l$ forment une base du sous-espace invariant de dimension l d'une matrice B d'ordre $n\times n$. Démontrer que l'enveloppe linéaire des produits kroneckeriens $e_i\times f_j$, $i=1, \ldots, k$; $j=1, \ldots, l$, est le sous-espace invariant de dimension kl

a) de la matrice $A\times B$;

b) de la matrice $A\times E_n+E_m\times B$.

6.3.36*. Démontrer que pour tout opérateur A agissant dans un espace complexe X de dimension n il existe une suite de sous-espaces invariants $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, L_n$ tels que la dimension de l'espace L_k soit k et

$$L_1\subset L_2\subset \ldots \subset L_{n-1}\subset L_n=X.$$

Montrer que, dans une base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace composé de façon que $e_i\in L_i$, la matrice d'un opérateur A est une matrice triangulaire supérieure; mais si l'ordre des vecteurs de la base est interverti pour $e_n, \ldots, e_1$, la matrice de A devient triangulaire inférieure. Les éléments diagonaux de ces matrices, que représentent-ils?

6.3.37. Déduire du problème 6.3.36 le corollaire suivant : toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

6.3.38*. Démontrer que la proposition du problème précédent est indépendante du problème 6.3.36.

6.3.39. Démontrer la non-unicité de la forme triangulaire de la matrice complexe A donnée. Plus précisément, quelle que soit la mise en ordre préalable donnée des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, il existe une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) semblable dont la diagonale principale porte les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans l'ordre requis.

Réduire les matrices suivantes par une transformation de similitude à une forme triangulaire (indiquer les formes triangulaires obtenues et les matrices de transformation) :

6.3.40. $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|.$ **6.3.41.** $\left\|\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{matrix}\right\|.$

6.3.42*. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres d'une matrice complexe A d'ordre $n\times n$ toutes distinctes, $k_1, \ldots, k_m$ les multiplicités algébriques de ces valeurs propres. Démontrer que la matrice A est de structure simple si et seulement si elle est semblable à une matrice B de la structure partitionnée suivante

$$B=\begin{Vmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1m} \\ 0 & \lambda_2 E_{k_2} & B_{23} & \ldots & B_{2m} \\ 0 & 0 & \lambda_3 E_{k_3} & \ldots & B_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_m E_{k_m} \end{Vmatrix}.$$

6.3.43. Démontrer que dans un espace complexe un opérateur est nilpotent si et seulement si toutes ses valeurs propres sont nulles.

6.3.44*. Démontrer que les matrices commutables A et B peuvent être réduites à la forme triangulaire par une même transformation de similitude.

6.3.45. Que signifie la proposition du problème 6.3.44 pour les opérateurs commutables A et B?

6.3.46*. Démontrer que toute matrice carrée réelle est semblable à une matrice quasi triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les cases diagonales sont de l'ordre 1 ou 2.

6.3.47. Déduire du résultat du problème 6.3.46 le corollaire suivant : dans un espace réel de dimension n tout opérateur possède un sous-espace invariant de dimension $n-1$ ou $n-2$.

6.3.48*. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres d'une matrice complexe A d'ordre $m\times m$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe B d'ordre $n\times n$ (chacune des suites peut compter de mêmes éléments). Démontrer que :

a) les mn produits $\lambda_i\mu_j$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, donnent toute la collection des valeurs propres de la matrice $A\times B$ et de l'opérateur G_{AB} (cf. problème 5.6.10);

b) les mn sommes $\lambda_i+\mu_j$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, donnent toutes les collections des valeurs propres de la matrice $A\times E_n+E_m\times B$ de l'opérateur F_{AB}.

6.3.49. Prouver que l'équation matricielle

$$AX+BX=C,$$

où A, B, C sont des matrices complexes d'ordre $m\times m$, $n\times n$ et $m\times n$ respectivement, possède une solution et une seule si les valeurs propres λ_i de la matrice A et μ_j de la matrice B ne forment aucun couple tel que $\lambda_i+\mu_j=0$.

6.3.50*. Supposons qu'un opérateur A d'un espace complexe est réduit par un couple de sous-espaces L_1 et L_2; de plus, les opérateurs induits A/L_1 et A/L_2 ne possèdent pas de mêmes valeurs propres. Démontrer que ce même couple de sous-espaces L_1 et L_2 réduit tout opérateur B qui commute avec A. Extrapoler cette proposition au cas d'un nombre fini quelconque de sous-espaces.

6.3.51. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe A d'ordre $n \times n$ (parmi les λ_i il peut y en avoir de mêmes nombres). Démontrer que tous les produits possibles suivant p des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ donnent dans l'ensemble toutes les valeurs propres de la p-ième matrice associée A_p.

§ 6.4. Sous-espaces principaux, forme de Jordan

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce qui suit les problèmes sont répartis dans l'ordre suivant :

Sous-espaces principaux. Dans ce domaine les outils essentiels sont : le théorème de la décomposition d'un espace complexe en une somme directe des sous-espaces principaux d'un opérateur A et la description du sous-espace K_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i envisagée comme un noyau d'une certaine puissance de l'opérateur $A-\lambda_i E$. Nous donnons les corollaires du théorème de la décomposition, les problèmes de calcul sur la construction des sous-espaces principaux et nous discutons de la notion d'indice du vecteur principal.

Structure du sous-espace principal. L'exposé est présenté par étapes. Nous commençons par le cas le plus simple, lorsque l'indice maximal du vecteur principal coïncide avec la dimension du sous-espace principal. Ensuite les faits se compliquent progressivement pour aboutir finalement au cas général. A chaque étape nous montrons la construction de la base canonique et donnons des exemples de calcul. Une fois la structure d'un sous-espace principal isolé assimilée, il devient possible de

Construire la forme de Jordan d'un opérateur arbitraire. Outre les problèmes de calcul, nous proposons également ici au lecteur plusieurs problèmes théoriques qui font appel à la forme de Jordan. En particulier, nous déduisons les formules pour calculer la forme de Jordan en omettant la construction de la base canonique. Le paragraphe s'achève par la

Relation entre la similitude des matrices et la forme de Jordan.

Dans ce paragraphe, sauf mention explicite, nous n'examinons que les opérateurs qui agissent dans un espace complexe et les matrices complexes.

6.4.1. En appliquant les problèmes 5.3.9 et 5.3.10 démontrer que pour tout opérateur A qui agit dans un espace X de dimension n réel ou complexe, il existe une décomposition de X en une somme directe des sous-espaces

$$X = N \dot{+} T,$$

où N est le noyau, et T l'image de l'opérateur A^q, q étant un nombre naturel. De plus, le plus petit de tels nombres q vérifie l'inégalité $q \leq n$.

Montrer que sur le sous-espace N un opérateur A induit un opérateur nilpotent, et sur le sous-espace T, un opérateur non dégénéré. Ainsi, la proposition du problème peut être formulée également de la façon suivante : tout opérateur A est somme directe des opérateurs nilpotent et non dégénéré.

6.4.2*. Démontrer que la décomposition d'un opérateur A en somme directe des opérateurs nilpotent et non dégénéré est unique.

6.4.3. Prouver que la dimension d'un sous-espace N dans la décomposition (6.4.1) est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre nulle de l'opérateur A.

6.4.4*. Démontrer que pour tout opérateur A il existe une décomposition de l'espace X en somme directe des sous-espaces $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_m}$:

$$X = K_{\lambda_1} \dot{+} K_{\lambda_2} \dot{+} \ldots \dot{+} K_{\lambda_m}, \tag{6.4.2}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres toutes distinctes de A de multiplicités algébriques $k_1, \ldots, k_m$ respectivement, chacun des sous-espaces K_{λ_i} étant invariant par rapport à A et l'opérateur A/K_{λ_i} induit sur ce sous-espace possédant le polynôme caractéristique $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

6.4.5. Démontrer que la décomposition (6.4.2) qui possède les propriétés décrites dans le problème 6.4.4 est unique pour l'opérateur A donné.

6.4.6. Le sous-espace K_{λ_i} de la décomposition (6.4.2) s'appelle *sous-espace principal* associé à la valeur propre λ_i. Montrer que les problèmes 6.4.1 à 6.4.5 entraînent que :

a) le sous-espace K_{λ_i} peut être décrit comme un ensemble des vecteurs x tels que $(A-\lambda_i E)^s x=0$; ici s est un nombre naturel quelconque;

b) le sous-espace K_{λ_i} peut être décrit comme le noyau de l'opérateur $(A-\lambda_i E)^{q_i}$, où q_i est un nombre naturel ne dépassant pas k_i;

c) le sous-espace propre L_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i est emboîté dans le sous-espace principal K_{λ_i}.

6.4.7. Montrer que pour qu'un opérateur A soit de structure simple, il faut et il suffit que pour chaque valeur propre λ_i de cet opérateur, le sous-espace propre L_{λ_i} coïncide avec le sous-espace principal K_{λ_i}.

6.4.8. Démontrer que si K_{λ_i} est un sous-espace principal de l'opérateur A associé à la valeur propre λ_i, alors :

a) K_{λ_i} est un sous-espace principal de l'opérateur $A-\lambda_0 E$ associé à la valeur propre $\lambda_i-\lambda_0$;

b) K_{λ_i} est un sous-espace principal de l'opérateur A^{-1} associé à la valeur propre $1/\lambda_i$.

6.4.9*. Démontrer que tout sous-espace principal d'un opérateur A est un sous-espace invariant d'un opérateur B quelconque commutant avec A.

6.4.10*. Démontrer le *théorème de Cayley-Hamilton :* tout opérateur A est annulé par son polynôme caractéristique.

6.4.11. Démontrer que si un opérateur A d'un espace de dimension n est non dégénéré, l'inverse A^{-1} peut être mis sous la forme d'un polynôme de degré $n-1$ de A.

Construire les sous-espaces principaux des matrices suivantes :

6.4.12. $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **6.4.13.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.14. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. **6.4.15.** $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.16. Tout vecteur du sous-espace principal K_{λ_i} d'un opérateur A s'appelle *vecteur principal* de cet opérateur associé à la valeur propre λ_i. On appelle *indice* du vecteur principal x de K_{λ_i} le nombre naturel h tel que

$(A-\lambda_i E)^h x=0$, mais $(A-\lambda_i E)^{h-1}x\neq 0$. L'indice du vecteur principal est nul par définition.

Montrer que :

a) l'indice de tout vecteur de K_{λ_i} ne dépasse pas la multiplicité algébrique k_i de la valeur propre λ_i;

b) l'indice du vecteur propre est égal à 1;

c) l'ensemble H_k des vecteurs de K_{λ_i} dont l'indice ne dépasse pas le nombre naturel k donné est un sous-espace.

6.4.17*. Soit x le vecteur principal d'un opérateur A associé à la valeur propre λ_i et d'indice $h(>0)$. Démontrer que :

a) l'indice du vecteur $(A-\lambda_i E)x$ est $h-1$;

b) l'indice du vecteur $(A-\lambda_j E)x$, où λ_j est la valeur propre de A distincte de λ_i, est h;

c) si λ_i est une racine du polynôme $f(t)$ de multiplicité l, où $l\leq h$, alors l'indice du vecteur $f(A)x$ est $h-l$;

d) l'indice du vecteur $A^{-1}x$ est h;

e) si B est un opérateur commutant avec A, l'indice du vecteur Bx ne dépasse pas h.

6.4.18. Montrer que le vecteur principal x d'un opérateur A est un vecteur principal de même indice a) pour l'opérateur $A-\lambda_0 E$; b) pour l'opérateur A^{-1}.

6.4.19. Prouver que le système de vecteurs non nuls de K_{λ_i} possédant des indices distincts deux à deux est linéairement indépendant.

6.4.20. Soit x un vecteur d'indice h de K_{λ_i}.

Montrer que :

a) le système de vecteurs $(A-\lambda_i E)^{h-1}x$, $(A-\lambda_i E)^{h-2}x$, ..., $(A-\lambda_i E)x$, x est linéairement indépendant;

b) l'enveloppe linéaire de ce système est un sous-espace invariant de l'opérateur A.

Dans les problèmes 6.4.21-6.4.62 on examine les opérateurs d'un espace de dimension n et les matrices d'ordre n ne possédant qu'une seule valeur propre λ_0 de multiplicité algébrique n. Dans ce qui suit cette circonstance n'est pas mentionnée de façon tacite. Certes, tous les résultats obtenus sont vrais également pour un opérateur arbitraire considéré seulement sur le sous-espace principal.

6.4.21. Un opérateur A d'un espace X de dimension n est dit *à bloc unique* si l'indice maximal du vecteur principal coïncide avec la dimension n de l'espace. Démontrer que :

a) toute base de l'espace X contient au moins un vecteur d'indice n;

b) si x est un vecteur d'indice n, le système de vecteurs $(A-\lambda_0 E)^{n-1}x$, $(A-\lambda_0 E)^{n-2}x$, ..., $(A-\lambda_0 E)x$, x est une base de l'espace X;

c) la matrice de A dans cette base est une cellule de Jordan d'ordre n associée au nombre λ_0. Le point c) explique le sens de la dénomination « opérateur à bloc unique ».

Ainsi, dans le cas d'un opérateur à bloc unique la base canonique est un système $(A-\lambda_0 E)^{n-1}x, \ldots, (A-\lambda_0 E)x, x$ appelé *série* issue du vecteur x, alors que la forme de Jordan est composée d'une seule cellule d'ordre n.

6.4.22. Les données étant celles du problème 6.4.21, b) trouver la matrice d'un opérateur A dans la base $x, (A-\lambda_0 E)x, \ldots, (A-\lambda_0 E)^{n-1}x$.

Construire la base canonique et trouver la forme de Jordan des matrices suivantes :

6.4.23. $\begin{Vmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.4.24. $\begin{Vmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{Vmatrix}$.

6.4.25. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.4.26. $\begin{Vmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Trouver la forme de Jordan des matrices d'ordre n suivantes :

6.4.27. $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.28. $\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$

6.4.29. $\begin{Vmatrix} 9 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \alpha_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 9 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 9 \end{Vmatrix}, \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \neq 0.$

6.4.30. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 0 & 1 & 2 & 3 \dots n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \dots n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.31. $$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \dots n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 0 & 0 & 2 & 3 \dots n-1 \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 2 \end{Vmatrix}.$$

6.4.32. $$\begin{Vmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} \dots a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha \dots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \ddots \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \alpha \end{Vmatrix},$$

$a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,n} \neq 0.$

6.4.33. Trouver la base canonique et la forme de Jordan de l'opérateur de dérivation dans l'espace des polynômes M_n.

6.4.34. Démontrer que si A est un opérateur à bloc unique à valeur propre $\lambda_0 \neq 0$, alors les opérateurs qui suivent sont, eux aussi, à bloc unique : a) l'opérateur A^2; b) l'opérateur A^l pour tout nombre naturel l; c) l'opérateur A^{-1}.

6.4.35. Montrer que si A est un opérateur à bloc unique à valeur propre 0, A^2 n'est déjà plus un opérateur à bloc unique (on suppose que la dimension de l'espace est supérieure à 1).

6.4.36. Démontrer que pour un opérateur à bloc unique A, le sous-espace H_k, noyau de l'opérateur $(A-\lambda_0E)^k$, est de dimension k, $0<k\leq n$.

6.4.37. Démontrer qu'un opérateur à bloc unique A ne possède pas de sous-espaces invariants non triviaux distincts des sous-espaces H_k (cf. problème 6.4.36).

6.4.38. Soient A et B des opérateurs commutables à bloc unique. Prouver que les espaces invariants de ces opérateurs coïncident.

6.4.39. Démontrer que le polynôme minimal d'un opérateur à bloc unique A coïncide avec son polynôme caractéristique.

6.4.40*. Soit l'indice maximal égal à t d'un vecteur d'un espace X. Les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants et leur indice est t; de plus, l'intersection de l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et du sous-espace H_{t-1} se compose du seul vecteur nul. Démontrer que quel que soit le nombre naturel k, $0<k<t$, les vecteurs $(A-\lambda_0E)^kx_1, \dots, (A-\lambda_0E)^kx_p$ sont linéairement indépendants et l'intersection de l'enveloppe linéaire de

ces vecteurs avec le sous-espace H_{t-k-1} se compose du seul vecteur nul [rappelons que le sous-espace H_k est le noyau de l'opérateur $(A-\lambda_0 E)^k$].

6.4.41. Désignons par m_k le défaut de l'opérateur $(A-\lambda_0 E)^k$. Déduire du résultat du problème 6.4.40 les inégalités

$$n-m_{t-1}=m_t-m_{t-1}\leq m_k-m_{k-1},$$

où $0<k<t$, $m_0=0$.

6.4.42*. Démontrer que dans l'énoncé du problème 6.4.40, les séries construites à partir des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ engendrent dans l'ensemble un système linéairement indépendant.

6.4.43. Montrer que si dans l'énoncé du problème 6.4.40 on respecte la condition $n=(n-m_{t-1})t$ (où n est la dimension de l'espace X),

a) la collection des séries $(A-\lambda_0 E)^{t-1}x_1, \ldots, (A-\lambda_0 E)x_1, x_1, \ldots$ $\ldots, (A-\lambda_0 E)^{t-1}x_p, \ldots, (A-\lambda_0 E)x_p, x_p$ engendrent une base de l'espace X (on adopte ici $p=n-m_{t-1}$);

b) la matrice de l'opérateur A dans cette base est de la forme quasi diagonale suivante :

$$\left\|\begin{matrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_p \end{matrix}\right\|,$$

où chacune des matrices $J_1, J_2, \ldots, J_p$ est une cellule de Jordan d'ordre t, associée au nombre λ_0.

Ainsi, dans le cas considéré la base canonique d'un opérateur A se compose de plusieurs séries de longueur maximale, tandis que la forme de Jordan, de plusieurs cellules de Jordan de même ordre.

Construire la base canonique et trouver la forme de Jordan des matrices suivantes :

6.4.44. $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|.$ **6.4.45.** $\left\|\begin{matrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{matrix}\right\|.$

6.4.46. $\left\|\begin{matrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix}\right\|.$

6.4.47. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$

6.4.48. Trouver la base canonique et la forme de Jordan de l'opérateur de dérivation seconde dans l'espace des polynômes M_n en supposant que $n=2k-1$, k étant un entier.

6.4.49. L'indice maximal d'un vecteur de l'espace X est t. Les vecteurs linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_{p_1}$ sont d'indice t; de plus, l'espace X est somme directe des sous-espaces H_{t-1} et de l'enveloppe linéaire tendue sur ce système de vecteurs. Démontrer que si les nombres m_k (cf. problème 6.4.41) vérifient l'inégalité

$$m_t-m_{t-1}<m_{t-1}-m_{t-2},$$

alors :

a) les séries construites à partir des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ n'engendrent pas dans l'ensemble de base de X;

b) les séries construites à partir des vecteurs $(A-\lambda_0E)x_1, \ldots, (A-\lambda_0E)x_{p_1}$ n'engendrent pas dans l'ensemble de base du sous-espace H_{t-1};

c) si les vecteurs linéairement indépendants $x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ d'indice $t-1$ sont tels que l'enveloppe linéaire tendue sur le système de vecteurs $(A-\lambda_0E)x_1, \ldots, (A-\lambda_0E)x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ donne dans la somme directe avec le sous-espace H_{t-2} le sous-espace H_{t-1}, les séries construites à partir des vecteurs $x_1, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ engendrent dans l'ensemble un système linéairement indépendant;

d) les nombres m_k satisfont aux relations

$$m_{t-1}-m_{t-2}\leq m_k-m_{k-1},$$

où $0<k<t-1$, $m_0=0$.

6.4.50. Trouver la relation entre la dimension n d'un espace X, l'indice maximal t d'un vecteur et les nombres m_k, qui permet de former une base de X à partir des séries construites dans le problème 6.4.49, c). Construire pour ce cas-là la forme de Jordan de l'opérateur A.

Construire la base canonique et trouver la forme de Jordan des matrices suivantes :

6.4.51. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}.$ **6.4.52.** $\begin{Vmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$

6.4.53. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$. **6.4.54.** $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.55. Trouver la base canonique et la forme de Jordan de l'opérateur de dérivation seconde dans l'espace des polynômes M_n, en supposant que $n=2k$, k étant un entier.

6.4.56. Montrer que dans le cas général, la base d'un espace peut être composée de p_1 séries de longueur maximale t, de p_2-p_1 séries de longueur $t-1$, en général, de $p_{t-k+1}-p_{t-k}$ séries de longueur k, $0<k<t$. Ici

$$p_k=m_{t-k+1}-m_{t-k}.$$

Trouver pour ce cas la forme de Jordan de l'opérateur.

6.4.57. Déduire du résultat du problème 6.4.56 le corollaire suivant : les nombres m_k doivent vérifier les inégalités

$$m_{r+1}-m_r \leq m_{s+1}-m_s$$

pour $r>s$.

6.4.58. Est-ce que dans un espace de dimension 8 peut exister un opérateur nilpotent A tel que les nombres r_k, où r_k désigne le rang de l'opérateur A^k, constituent la suite 6, 4, 3, 1, 0?

Construire la base canonique et trouver la forme de Jordan des matrices suivantes :

6.4.59. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. **6.4.60.** $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.4.61. $\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$.

6.4.62*. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

En appliquant le processus de construction de la base canonique dans le sous-espace principal décrit dans la section précédente et la décomposition d'un espace en une somme directe des sous-espaces principaux, trouver la base canonique et la forme de Jordan des matrices :

6.4.63. $\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$. **6.4.64.** $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.4.65. $\begin{Vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$. **6.4.66.** $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.67. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **6.4.68.** $\begin{Vmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.69. $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. **6.4.70.** $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.71. Les vecteurs de la base canonique d'un opérateur A sont indicés dans un ordre inverse. Comment changera la matrice de l'opérateur?

6.4.72. En connaissant la forme de Jordan d'un opérateur A, trouver la forme de Jordan de l'opérateur a) $A-\lambda_0 E$; b) A^{-1}.

6.4.73. Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres d'un opérateur A d'un espace de dimension n (parmi ces nombres il peut y avoir des nombres égaux), les valeurs propres du polynôme $f(A)$ sont les nombres $f(\lambda_1), \ldots$ $\ldots, f(\lambda_n)$.

6.4.74. Démontrer que tout opérateur d'un espace complexe est somme directe des opérateurs à bloc unique.

6.4.75*. Trouver la forme de Jordan de l'opérateur A^2 si l'on connaît la forme de Jordan d'un opérateur A.

6.4.76. Démontrer que tout opérateur d'un espace complexe peut être mis sous la forme de la somme d'un opérateur de structure simple et d'un opérateur nilpotent.

6.4.77*. Démontrer que A est un opérateur de réflexion s'il satisfait à la condition $A^2=E$ et s'il n'est pas scalaire.

6.4.78. Démontrer qu'un opérateur A, qui satisfait à la condition $A^k=E$ pour un k naturel, est un opérateur de structure simple.

6.4.79*. Démontrer que dans toute forme de Jordan d'un opérateur A, le nombre de cellules de Jordan associées à la valeur propre λ_0 est égal au défaut m_1 de l'opérateur $A-\lambda_0 E$.

6.4.80*. Démontrer que dans toute forme de Jordan d'un opérateur A le nombre de cellules de Jordan d'ordre supérieur ou égal à k, associées à la valeur propre λ_0 est défini par la formule

$$S_{\geq k}=m_k-m_{k-1},$$

où $m_0=0$ et m_k est le défaut de l'opérateur $(A-\lambda_0 E)^k$.

6.4.81. Déduire du résultat du problème 6.4.80 la relation

$$S_k=2m_k-m_{k+1}-m_{k-1},$$

où S_k est le nombre de cellules de Jordan d'ordre k associées à la valeur propre λ_0.

Ainsi, la forme de Jordan de tout opérateur est bien définie à disposition des cellules de Jordan sur la diagonale près.

Sans calculer la base canonique trouver la forme de Jordan des matrices :

6.4.82. $\left\|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$ **6.4.83.** $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|.$

6.4.84. $\left\|\begin{matrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{matrix}\right\|.$

6.4.85. $\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{matrix}\right\|.$

6.4.86*. $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|.$

6.4.87*. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

6.4.88. Dans l'espace des polynômes M_n trouver la forme de Jordan de l'opérateur de différences A_1.

6.4.89. Dans l'espace des polynômes M_8 trouver la forme de Jordan a) de l'opérateur de dérivation troisième; b) de l'opérateur A_1^3, où A_1 est l'opérateur de différences.

6.4.90. Montrer que dans chaque classe des matrices semblables il y a une forme de Jordan et une seule à permutation des cellules de Jordan sur la diagonale près.

Déterminer si les matrices données A, B et C sont des matrices semblables :

6.4.91. $A^* = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -219 \end{Vmatrix},$

$C = \begin{Vmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -218 \end{Vmatrix}.$

6.4.92. $A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$

$C = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$

6.4.93. $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{Vmatrix},$

$C = \begin{Vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{Vmatrix}.$

6.4.94. Démontrer que toute matrice complexe A est semblable à la transposée A^T.

6.4.95. Que peut-on dire de la forme de Jordan d'une matrice A, si A est semblable à l'inverse A^{-1}?

6.4.96. Démontrer qu'une cellule de Jordan est semblable à la matrice de Frobenius de son polynôme caractéristique.

6.4.97. Démontrer que toute matrice complexe est semblable à une matrice quasi diagonale dont toutes les cellules diagonales sont des matrices de Frobenius.

6.4.98*. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme minimal d'une matrice complexe coïncide avec son polynôme caractéristique.

6.4.99. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres toutes distinctes d'une matrice complexe A d'ordre $n\times n$. Démontrer que la matrice A est de structure simple si et seulement si le polynôme $(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_m)$ est pour A un polynôme minimal.

6.4.100*. Une matrice carrée A d'ordre m est de structure simple; on connaît la forme de Jordan J de la matrice B d'ordre $n\times n$. Trouver la forme de Jordan de la matrice a) $A\times B$; b) $A\times E_n+E_m\times B$.

Appliquer les résultats obtenus aux opérateurs G_{AB} et F_{AB} du problème 5.6.10.

6.4.101. Trouver la forme de Jordan de la matrice d'ordre n

$$A=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 \\ \varepsilon & & & & & 1 \end{matrix}\right\|,$$

où ε est positif et se trouve dans la case $(n, 1)$, les éléments non indiqués hors diagonaux étant nuls.

6.4.102*. Remplaçons dans la forme de Jordan d'une matrice A les éléments hors diagonaux égaux à un (s'ils existent) par un nombre arbitraire $\varepsilon\neq 0$. Démontrer que la matrice obtenue est égale à la matrice A.

CHAPITRE 7

OPÉRATEURS D'UN ESPACE UNITAIRE

§ 7.0. Terminologie et généralités

Soient X et Y deux espaces, tous les deux euclidiens ou tous les deux unitaires. Considérons un opérateur linéaire A de ω_{XY}. L'opérateur linéaire A^* de ω_{XY} est dit *adjoint par rapport à l'opérateur* A si pour tout vecteur $x \in X$ et tout vecteur $y \in Y$ on vérifie l'égalité

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{7.0.1}$$

Tout opérateur A possède un opérateur adjoint A^* et un seul.

Soit A une matrice complexe $m \times n$. La matrice A^* de type $n \times m$ est dite *adjointe par rapport à la matrice* A si

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$$

pour tous les i, j.

Dans chaque couple de bases orthonormées des espaces unitaires X et Y à l'opérateur adjoint correspond la matrice adjointe et inversement. Dans le cas des espaces euclidiens X et Y cette même correspondance s'établit entre les opérateurs adjoints et les matrices transposées.

Considérons maintenant les opérateurs qui agissent dans un espace unitaire X. On a le théorème suivant :

Théorème de Schur. *Pour tout opérateur A il existe une base orthonormée d'un espace X dans laquelle la matrice de l'opérateur est triangulaire.*

La notion d'opérateur adjoint permet de dégager plusieurs classes importantes d'opérateurs qui agissent dans un espace unitaire X.

Un opérateur A est dit *normal* si

$$A^*A = AA^*. \tag{7.0.2}$$

Un opérateur U est dit *unitaire* si

$$U^*U = UU^* = E. \tag{7.0.3}$$

Un opérateur H est dit *hermitien* si

$$H^* = H. \tag{7.0.4}$$

Un opérateur K est dit *antihermitien* si

$$K^* = -K. \tag{7.0.5}$$

L'opérateur hermitien H est dit *non négatif (défini positif)* si pour tout vecteur non nul x

$$(Hx, x) \geq 0 \quad (>0). \tag{7.0.6}$$

On définit de la même façon les matrices *normales*, *unitaires*, *hermitiennes*, *antihermitiennes*, *non négatives*, *définies positives*. Dans les deux derniers cas, comme d'habitude, les matrices sont identifiées aux opérateurs d'un espace arithmétique.

Les classes des opérateurs ci-dessus vérifient les résultats suivants :

Un opérateur A est normal si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

Un opérateur normal A est unitaire si et seulement si toutes ses valeurs propres sont égales à l'unité en module.

Un opérateur normal A est hermitien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles.

Un opérateur hermitien H est non négatif (défini positif) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont non négatives (positives).

Tout opérateur A de ω_{XX} vérifie la représentation

$$A = H_1 + iH_2, \tag{7.0.7}$$

où H_1 et H_2 sont des opérateurs hermitiens; cette représentation s'appelle *décomposition hermitienne*. On a

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Dans un espace euclidien X les relations (7.0.2) à (7.0.6) font également ressortir les classes des opérateurs dits *normaux*, *orthogonaux*, *symétriques*, *antisymétriques*, *non négatifs*, *définis positifs* respectivement. Les classes de même nom des matrices réelles sont définies de la même façon.

Les définitions et les résultats qui suivent sont également vrais tant pour les espaces unitaires que pour les espaces euclidiens.

Soit A un opérateur de rang r agissant de X dans Y. Alors, les valeurs propres non nulles des opérateurs A^*A et AA^* coïncident (compte tenu de leurs multiplicités) et sont positives.

Si n et m sont les dimensions des espaces X et Y respectivement, la multiplicité de la valeur propre nulle est $n-r$ pour l'opérateur A^*A et $m-r$ pour l'opérateur AA^*.

Posons $s = \min(n, m)$ et désignons par $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_s^2$ $(\alpha_i \geq 0)$ les valeurs propres communes des opérateurs A^*A et AA^*. Les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ s'appellent *nombres singuliers de l'opérateur A*.

D'une façon analogue on définit les *nombres singuliers d'une matrice*.

Dans tous les cas un opérateur A possède des bases orthonormées $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ (si $A \in \omega_{XX}$, $m=n$) telles que :

1) $e_1, \ldots, e_n$ sont les vecteurs propres de l'opérateur A^*A;

2) $f_1, \ldots, f_m$ sont les vecteurs propres de l'opérateur AA^*;

3) si $e_1, \ldots, e_r$ et $f_1, \ldots, f_r$ correspondent aux nombres non nuls $\alpha_1^2, \ldots$ $\ldots, \alpha_r^2$, on a

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} A e_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Chaque couple de bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ possédant les propriétés indiquées s'appelle couple de *bases singulières* d'un opérateur A.

Tout opérateur A qui agit dans un espace X donne lieu à une représentation sous la forme d'un produit des opérateurs non négatif et unitaire (orthogonal)

$$A = HU, \tag{7.0.8}$$

appelée *décomposition polaire* de A.

Soient A un opérateur de ω_{XY}, b le vecteur fixé de l'espace Y. Considérons l'égalité

$$Ax = b \tag{7.0.9}$$

comme une équation permettant de déterminer les vecteurs x de X. Cette équation est compatible si et seulement si $b \in T_A$. Dans ce cas, les solutions de (7.0.9) sont fournies par toutes les images réciproques du vecteur b. Mais si $b \notin T_A$, alors, dans ce cas-là aussi, il est raisonnable de chercher des vecteurs x tels que le vecteur

$$y = b - Ax$$

soit de longueur minimale au possible. Tout vecteur x de ce type s'appelle *pseudo-solution* de l'équation (7.0.9). La pseudo-solution dont la longueur est la plus petite s'appelle *pseudo-solution normale* de l'équation (7.0.9). Elle existe toujours et est unique.

En considérant l'équation (7.0.9) pour tous les vecteurs b de Y et en faisant correspondre à chaque vecteur b la pseudo-solution normale de l'équation correspondante, on obtient un opérateur linéaire de Y dans X qu'on appelle *pseudo-inverse* de l'opérateur A et qu'on note A^+.

Une *forme quadratique* F de n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$ est une fonction de la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{7.0.10}$$

où a_{ij} sont des nombres réels et où on peut adopter $a_{ij} = a_{ji}$.

Si l'on compose une matrice symétrique A des coefficients a_{ij} (appelée *matrice de la forme quadratique*) et un vecteur colonne x de variables $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, la définition d'une forme quadratique peut s'écrire

$$F = (Ax, x). \tag{7.0.11}$$

Le produit scalaire est défini ici par la règle usuelle (7.1.4). On appelle *rang* d'une forme quadratique F le rang de sa matrice A.

En remplaçant les variables

$$x = Py, \tag{7.0.12}$$

la forme F devient une forme quadratique de nouvelles variables $y_1, \ldots, y_n$, la matrice B de cette forme étant associée à la matrice A par la relation

$$B = P^T A P. \quad (7.0.13)$$

La transformation des variables (7.0.12) est dite *non dégénérée* si la matrice P est non dégénérée. Dans les transformations non dégénérées des variables le rang d'une matrice quadratique ne change pas.

Une transformation non dégénérée peut réduire toute forme quadratique F de rang r à la forme

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \quad (7.0.14)$$

appelée *forme canonique* de la forme F. Ici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont différents de zéro.

La notation canonique de la forme quadratique donnée n'est pas bien définie en général. Notamment, on peut toujours obtenir que les coefficients non nuls de la forme canonique valent 1 ou -1. Cette forme canonique est dite *normale*. Bien que la forme canonique est non univoque, elle vérifie la proposition suivante :

Loi d'inertie des formes quadratiques. Le nombre de coefficients positifs et le nombre de coefficients négatifs parmi les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ est le même pour toute forme canonique à laquelle peut être réduite une forme quadratique donnée par une transformation non dégénérée des variables.

Ces nombres s'appellent *indice d'inertie positif* et *indice d'inertie négatif* respectivement, et la différence entre ces indices s'appelle *signature* de la forme quadratique.

Notons que toute forme quadratique peut être ramenée à la forme canonique par une transformation *orthogonale* des variables (c'est-à-dire, par une transformation à matrice orthogonale des coefficients). A cet effet, il suffit de prendre comme P dans la formule (7.0.12) la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A. Les coefficients de la forme canonique obtenue fournissent alors les valeurs propres de A.

La forme quadratique (7.0.11) est dite *définie positive* si

$$(Ax, x) > 0$$

pour $x \neq 0$. La forme normale d'une forme définie positive F s'écrit

$$F = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \quad (7.0.15)$$

Deux formes quadratiques F et G de mêmes variables peuvent être réduites à la forme canonique par une seule transformation si au moins l'une des formes (par exemple F) est définie positive. Dans ce cas on procède d'abord à la transformation $x = Py$ qui ramène F à la forme normale (7.0.15). G se transforme alors en une certaine forme des variables $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$. A la deuxième étape on réalise la transformation orthogonale $y = Qz$ qui réduit G à la forme canonique; F conserve sa forme normale et devient

$$F = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Notons à titre de conclusion que la notation $e^{i\varphi}$ utilisée dans ce chapitre doit être entendue comme une abréviation du nombre complexe $z=\cos\varphi+$ $+i\sin\varphi$.

§ 7.1. Opérateur adjoint; matrice adjointe

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous examinons les questions suivantes :

Définition et propriétés algébriques des opérateurs adjoints et des matrices adjointes.

Exemples des opérateurs adjoints.

Correspondance entre les opérateurs adjoints et les matrices adjointes qui a lieu dans les bases orthonormées d'un espace.

La relation entre les caractéristiques géométriques d'un opérateur A et de l'opérateur A^* telles que le noyau, l'image, les valeurs propres, etc.

Nous insistons partout sur le fait que la propriété de deux opérateurs d'être adjoints dépend du procédé par lequel un produit scalaire est introduit dans l'espace vectoriel.

7.1.1. Déduire de la définition d'un opérateur adjoint les propriétés suivantes :

a) $(A^*)^*=A$;
b) $(A+B)^*=A^*+B^*$;
c) $0^*=0$;
d) $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$;
e) $(AB)^*=B^*A^*$;
f) $E^*=E$;
g) si un opérateur A est non dégénéré, on a $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$;
h) $(A^m)^*=(A^*)^m$ pour tout m entier non négatif;
i) si un opérateur A est non dégénéré, la propriété h) a lieu pour tout m entier;
j) si $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_mt^m$ est un polynôme arbitraire on a

$$[f(A)]^*=\bar{f}(A^*),$$

où $\bar{f}(t)=\bar{a}_0+\bar{a}_1t+\ldots+\bar{a}_mt^m$.

7.1.2. Démontrer que les propriétés énoncées dans le problème précédent sont respectées également pour les matrices adjointes.

7.1.3. Montrer que pour un opérateur nilpotent A d'indice de nilpotence q l'opérateur adjoint A^* est également nilpotent et possède le même indice de nilpotence.

7.1.4. Montrer que si les opérateurs A et B sont commutables, les opérateurs adjoints A^* et B^* le sont aussi.

7.1.5. Dans les espaces unitaires (euclidiens) X et Y fixés on a certaines bases $e_1, \ldots, e_n$ et $q_1, \ldots, q_m$ respectivement. Supposons que les opérateurs linéaires A et B vérifient les relations

$$(Ae_i, q_j)=(e_i, Bq_j), \quad i=1, \ldots, n;$$
$$j=1, \ldots, m.$$

Démontrer que dans ce cas $A^*=B$.

7.1.6. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthogonale (mais non pas orthonormée) d'un espace X. Trouver dans cette base la relation entre les matrices de l'opérateur A de ω_{XX} et de l'opérateur adjoint A^*.

7.1.7. Supposons que dans une certaine base $e_1, \ldots, e_n$ d'un espace unitaire (euclidien) X, la matrice de l'opérateur A est A_e. Démontrer que dans la base $f_1, \ldots, f_n$ biorthogonale à $e_1, \ldots, e_n$ la matrice de l'opérateur adjoint A^* est $(A_e)^*$.

7.1.8. Supposons qu'un opérateur A agisse dans un espace unitaire (euclidien) unidimensionnel. En quoi consiste la transformation A^* adjointe par rapport à A?

7.1.9. Trouver l'opérateur adjoint pour effectuer la rotation d'un plan euclidien d'un angle α.

7.1.10*. Trouver l'opérateur adjoint d'un opérateur de l'espace euclidien tridimensionnel $Ax=[x, a]$, a étant un vecteur fixé.

7.1.11. Dans l'espace des polynômes M_2 on donne le produit scalaire

$$(f, g)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2, \qquad (7.1.1)$$

où $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$. Trouver les matrices de l'opé rateur de dérivation A et de son adjoint A^* dans la base a) $1, t, t^2$; b) $\frac{1}{2}t^2-$ $-\frac{1}{2}t,\ t^2-1,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t$; c) $1, t, \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}$.

7.1.12. Le produit scalaire

$$(f, g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1), \qquad (7.1.2)$$

est introduit dans l'espace M_2. Trouver la matrice de l'adjoint de l'opérateur de dérivation dans chacune des bases du problème 7.1.11. Comparer les matrices obtenues avec les matrices correspondantes de 7.1.11.

7.1.13. Le produit scalaire

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt \qquad (7.1.3)$$

est introduit dans l'espace M_2. Trouver la matrice de l'adjoint de l'opérateur de dérivation dans chacune des bases du problème 7.1.11.

7.1.14. Dans un espace arithmétique de dimension n dont les éléments sont des vecteurs colonnes on introduit le produit scalaire naturel

$$(x, y)=\alpha_1\bar{\beta}_1+\ldots+\alpha_n\bar{\beta}_n. \qquad (7.1.4)$$

Ici

$$x=\left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix}\right\|, \quad y=\left\|\begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix}\right\|$$

(dans le cas réel le signe de la conjugaison complexe est omis).

Montrer que si les matrices $n\times n$ sont identifiées avec les opérateurs de cet espace au sens du problème 5.6.7, l'opérateur adjoint de la matrice A est

a) au cas de l'espace réel R_n, la matrice transposée A^T;

b) au cas de l'espace complexe C_n, la matrice adjointe A^*.

7.1.15. Démontrer que dans le cas du produit kroneckerien $A\times B$ la matrice adjointe est de la forme $A^*\times B^*$.

7.1.16. Démontrer que, si A est une matrice carrée, les matrices associées vérifient la relation

$$(A^*)_p=(A_p)^*.$$

7.1.17. Désignons par $R_{n\times n}$ et $C_{n\times n}$ les espaces des matrices réelles et complexes respectivement, dans lesquelles le produit scalaire est donné par la formule

$$(A, B)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij} \qquad (7.1.5)$$

(dans le cas réel le signe de la conjugaison complexe est omis).

Montrer que

$$(A, B)=\operatorname{tr}(B^*A)=\operatorname{tr}(AB^*). \qquad (7.1.6)$$

7.1.18. Montrer que dans les espaces $R_{n\times n}$ et $C_{n\times n}$ les adjoints des opérateurs G_{AB} et F_{AB} du problème 5.6.10. sont les opérateurs $G_{A^*B^*}$ et $F_{A^*B^*}$.

7.1.19. Soient $A_1, \ldots, A_n$ les matrices $n\times n$ réelles fixes. Considérons l'opérateur A suivant de R_n dans $R_{n\times n}$:

$$x=\left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{matrix}\right\| \xrightarrow{A} Ax=\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_nA_n.$$

Le produit scalaire de R_n est donné d'après (7.1.4). Montrer que l'adjoint de A est l'opérateur

$$B\to y=\left\|\begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{matrix}\right\|, \quad \beta_i=\operatorname{tr}(B^TA_i)=\operatorname{tr}(A_i^TB), \quad i=1, \ldots, n.$$

Etendre ce résultat au cas complexe.

7.1.20. Montrer que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ d'un espace unitaire (euclidien) X peut s'écrire comme un produit scalaire

$$f(x)=(x, f),$$

où f est le vecteur fixé (pour la fonctionnelle donnée) de l'espace.

7.1.21. Montrer que l'adjoint d'un opérateur de projection est encore un opérateur de projection.

7.1.22. Montrer que l'adjoint d'un opérateur de réflexion est encore un opérateur de réflexion.

7.1.23. Montrer que le rang de l'opérateur adjoint A^* est égal au rang de l'opérateur A.

7.1.24. Prouver que le noyau de l'opérateur A^* coïncide avec le supplémentaire orthogonal de l'image de l'opérateur A.

7.1.25. Dans un espace euclidien tridimensionnel on a fixé le système de coordonnées cartésien $Oxyz$. Soit A l'opérateur de projection sur le plan de coordonnées Oxy parallèle à la droite, donnée par les équations $x=y=z$. Trouver l'opérateur adjoint A^*.

7.1.26. Trouver le noyau et l'image de l'opérateur de l'espace M_2 adjoint de l'opérateur de dérivation, si le produit scalaire est introduit dans M_2 par la formule a) (7.1.1); b) (7.1.2); c) (7.1.3).

7.1.27. Démontrer le *théorème de Fredholm* : pour qu'un système non homogène d'équations linéaires $Ax=b$ soit compatible, il faut et il suffit que le vecteur colonne b soit orthogonal à toutes les solutions du système homogène adjoint $A^*y=0$ (comparez à 4.5.3).

7.1.28. Démontrer l'*alternance de Fredholm* suivante : ou bien le système d'équations $Ax=b$ est compatible quel que soit le second membre b, ou bien le système adjoint homogène $A^*y=0$ admet des solutions non nulles.

7.1.29. Démontrer que le noyau de l'opérateur A^*A coïncide avec le noyau de l'opérateur A.

7.1.30. Prouver que l'image de l'opérateur A^*A coïncide avec l'image de l'opérateur A^*.

7.1.31. Soient les opérateurs A et B tels que $B^*A=0$. Démontrer que les images de ces opérateurs sont des sous-espaces orthogonaux.

7.1.32*. Démontrer que si $AB^*=0$ et $B^*A=0$, le rang de l'opérateur $A+B$ est égal à la somme des rangs des opérateurs A et B. En outre, le noyau de l'opérateur $A+B$ est l'intersection des noyaux des opérateurs A et B.

7.1.33. Démontrer que si le sous-espace L d'un espace unitaire (euclidien) est invariant par rapport à un opérateur A, son supplémentaire orthogonal $L^\perp$ est invariant par rapport à l'opérateur adjoint A^*.

7.1.34*. Dans l'espace M_n des polynômes de degré $\leq n$ le produit scalaire est donné par la formule

$$(f, g)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{7.1.7}$$

où $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$; $g(t)=b_0+b_1t+\ldots+b_nt^n$. Décrire tous les sous-espaces invariants de l'adjoint de l'opérateur de dérivation.

7.1.35. Le produit scalaire est introduit dans M_n par la formule

$$(f, g)=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(k). \tag{7.1.8}$$

Trouver le sous-espace invariant de dimension n de l'adjoint de l'opérateur de dérivation.

7.1.36. Même question pour le cas du produit scalaire défini dans M_n par la formule

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt. \tag{7.1.9}$$

7.1.37. Démontrer que dans un espace unitaire de dimension n tout opérateur possède a) un sous-espace invariant de dimension $n-1$; b) un sous-espace invariant de dimension k, $0<k<n$ (comparer avec 6.3.9 et 6.3.36).

7.1.38. Démontrer le théorème de Schur suivant : pour tout opérateur A qui agit dans un espace unitaire il existe une base orthonormée où la matrice d'un opérateur A est triangulaire (comparer avec 6.3.36).

7.1.39. Trouver la base de Schur de l'opérateur de dérivation dans l'espace M_2, si le produit scalaire est introduit dans cet espace par la formule a) (7.1.1); b) (7.1.2); c) (7.1.3).

7.1.40*. Démontrer que les opérateurs commutables A et B qui agissent dans un espace unitaire admettent une base de Schur commune, où les matrices de ces opérateurs sont de même forme triangulaire.

7.1.41. Trouver la relation entre les valeurs propres d'un opérateur A qui agit dans un espace unitaire et les valeurs propres de son adjoint A^*.

7.1.42. Soit x le vecteur propre des opérateurs adjoints A et A^*. Démontrer que les valeurs propres λ et μ des opérateurs A et A^*, associées au vecteur x, sont des nombres conjugués.

7.1.43. Soit x le vecteur propre d'un opérateur A, associé à la valeur propre λ, y le vecteur propre de l'opérateur A^*, associé à la valeur propre μ; de plus, $\mu\neq\bar{\lambda}$. Démontrer que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

7.1.44*. Soient K_λ et K_μ^* des sous-espaces principaux des opérateurs A et A^* associés aux valeurs propres λ et μ respectivement; de plus, $\mu\neq\bar{\lambda}$. Démontrer que les sous-espaces K_λ et K_μ^* sont orthogonaux.

7.1.45. Quelle est la relation entre les formes de Jordan des opérateurs adjoints A et A^*?

7.1.46. Dans l'espace des polynômes M_2 muni du produit scalaire (7.1.1) trouver les bases canoniques de Jordan d'un opérateur de dérivation et de son adjoint.

7.1.47*. Démontrer que la base de Schur d'un opérateur A est définie non univoque. Plus précisément, pour toute disposition donnée à l'avance des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'un opérateur A, il existe une base orthonormée de l'espace unitaire telle que la matrice de cet opérateur soit triangulaire supérieure (resp. inférieure); en outre, les valeurs propres λ_i se succèdent sur la diagonale principale dans l'ordre indiqué.

§ 7.2. Opérateurs normaux et matrices normales

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce qui suit nous discutons de diverses propriétés des opérateurs normaux et des matrices normales. Parmi ces propriétés les plus importantes sont, certainement, l'existence dans de tels opérateurs et matrices d'une base orthonormée composée de vecteurs propres, ce qui fait l'objet d'une grande partie des problèmes. Nous avons tenu encore à illustrer le fait important suivant : parmi tous les opérateurs de structure simple, les opérateurs normaux se distinguent par leur rapport au produit scalaire donné dans l'espace; plus précisément, leur base de vecteurs propres n'est pas arbitraire mais orthogonale. Mais si dans ce même espace vectoriel on change le produit scalaire, les opérateurs auparavant normaux cessent de l'être en général et

un autre sous-ensemble des opérateurs de structure simple devient classe d'opérateurs normaux.

7.2.1. Montrer que tout opérateur scalaire d'un espace unitaire (euclidien) est un opérateur normal.

7.2.2. Montrer que si A est un opérateur normal, les opérateurs suivants sont encore normaux :

a) αA pour tout nombre α;

b) A^k pour tout k naturel;

c) $f(A)$ pour tout polynôme $f(t)$;

d) A^{-1} si A est non dégénéré;

e) A^*.

7.2.3. Donner des exemples qui montrent que dans le cas général la somme $A+B$ et le produit AB des opérateurs normaux A et B ne sont déjà plus des opérateurs normaux.

7.2.4. Montrer que, dans toute base orthonormée de l'espace, la matrice d'un opérateur normal est encore normale. Inversement, toute matrice normale donne dans une telle base un opérateur normal.

7.2.5. Donner des exemples qui montrent que dans une base non orthogonale la matrice d'un opérateur normal a) peut ne pas être normale; b) peut être normale.

7.2.6. Montrer que tout opérateur normal qui agit dans un espace unitaire (euclidien) est un opérateur normal.

7.2.7. Montrer qu'un opérateur de rotation d'un espace euclidien est un opérateur normal.

7.2.8. Montrer qu'un opérateur d'un espace euclidien tridimensionnel $Ax=[x, a]$ est un opérateur normal.

7.2.9. Montrer que dans l'espace des polynômes M_n à produit scalaire (7.1.7) les opérateurs suivants sont des opérateurs normaux :

a) $f(t)\to f(-t)$;

b) $f(t)\to t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$.

7.2.10. Démontrer que toute matrice circulante est une matrice normale.

7.2.11. Soit $A=B+iC$ une matrice normale complexe d'ordre n. Démontrer que la matrice D réelle d'ordre $2n$

$$D=\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \tag{7.2.1}$$

est encore une matrice normale.

7.2.12. Démontrer que si les lignes et les colonnes d'une matrice normale sont considérées comme des vecteurs d'un espace arithmétique muni du produit scalaire naturel (7.1.4), alors

a) la longueur de la i-ième ligne est égale à la longueur de la i-ième colonne;

b) le produit scalaire des i-ième et j-ième lignes est égal au produit scalaire des j-ième et i-ième colonnes (dans l'ordre indiqué).

7.2.13. Démontrer qu'une matrice normale quasi triangulaire est de rigueur une matrice quasi diagonale.

7.2.14. Prouver que si A est une matrice normale, la matrice associée A_p est normale elle aussi.

7.2.15. Démontrer que la somme des carrés des modules de tous les mineurs d'ordre k choisis parmi les lignes d'une matrice normale A d'indices $i_1, \ldots, i_k$ est égale à la somme analogue des colonnes de mêmes indices.

7.2.16. Démontrer que le produit kroneckerien des matrices normales A et B dont l'ordre peut être distinct est encore une matrice normale.

7.2.17. Soient A et B des matrices normales $n\times n$. Démontrer que les opérateurs G_{AB} et F_{AB} (cf. 5.6.10) sont des opérateurs normaux de l'espace $C_{n\times n}(R_{n\times n})$.

7.2.18. Démontrer que si A est un opérateur normal, tout vecteur x vérifie l'égalité

$$|Ax| = |A^*x|\,. \qquad (7.2.2)$$

7.2.19. Prouver que le noyau d'un opérateur normal est un supplémentaire orthogonal de son image.

7.2.20*. Démontrer la proposition suivante : pour qu'un opérateur A d'un espace unitaire soit normal il faut et il suffit que pour tout nombre λ l'image et le noyau de l'opérateur $A-\lambda E$ soient orthogonaux. Une proposition analogue relative à un espace euclidien est-elle vraie?

7.2.21. Démontrer qu'un opérateur de projection P est normal si et seulement si son image et son noyau sont orthogonaux. P s'appelle alors opérateur de *projection orthogonale.*

7.2.22. Soient A et B des opérateurs normaux et $AB=0$. En résulte-t-il que $BA=0$?

7.2.23. Prouver que tout vecteur propre d'un opérateur normal A est aussi un vecteur propre de l'adjoint A^*.

7.2.24*. Démontrer la réciproque de 7.2.23 : si tout vecteur propre d'un opérateur A d'un espace unitaire est aussi un vecteur propre de l'adjoint A^*, l'opérateur A est normal.

7.2.25*. Prouver que tout sous-espace invariant d'un opérateur normal A est invariant par rapport à A^*.

7.2.26. Montrer qu'un opérateur induit par un opérateur normal sur un espace invariant arbitraire est encore un opérateur normal.

7.2.27. Montrer que les sous-espaces propres d'un opérateur normal sont orthogonaux deux à deux.

7.2.28. Montrer qu'un opérateur de réflexion R dans L_1 parallèlement à L_2 est normal si et seulement si les sous-espaces L_1 et L_2 sont orthogonaux. Dans ce cas R s'appelle opérateur de *réflexion orthogonale.*

7.2.29. Un opérateur orthogonal peut-il avoir une base non orthogonale composée de vecteurs propres?

Vérifier que les matrices ci-dessous sont des matrices normales et trouver

pour chacune d'elles la base orthonormée [au sens de (7.1.4)] de vecteurs propres :

7.2.30. $\begin{Vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}$. **7.2.31.** $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.2.32*. $\begin{Vmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{Vmatrix}$.

7.2.33. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

7.2.34. Peut-on introduire un produit scalaire dans l'espace des polynômes M_n $(n \geq 1)$ de façon que l'opérateur de dérivation soit un opérateur normal?

7.2.35. Dans l'espace des polynômes M_n $(n \geq 1)$ on considère l'opérateur $f(t) \rightarrow f(t+a)$, où a est un nombre fixé. Peut-on donner un produit scalaire dans M_n de façon que cet opérateur soit normal?

7.2.36. Soit X un espace vectoriel arbitraire. Prouver que quel que soit l'opérateur A de structure simple de X, on peut donner dans X un produit scalaire de façon que A soit un opérateur normal.

7.2.37*. Dans une base naturelle la matrice d'un opérateur A de l'espace arithmétique R_3 est

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Introduire un produit scalaire dans R_3 de façon que A soit un opérateur normal.

7.2.38*. Démontrer que A est un opérateur normal si et seulement si l'adjoint A^* est représenté par un polynôme de A.

7.2.39. Soit A un opérateur normal et supposons qu'il commute avec un certain opérateur B. Prouver que a) A^* commute avec B; b) A commute avec B^*.

7.2.40. Démontrer que les opérateurs normaux commutables A et B possèdent une base orthonormée commune de vecteurs propres.

Vérifier si les matrices A et B ci-dessous sont normales et commutables et construire sur ces matrices la base orthonormée commune de leurs vecteurs propres :

7.2.41. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.2.42.
$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} \frac{1+5i}{6} & \frac{-1+i}{3} & \frac{1-i}{6} \\ \frac{-1+i}{3} & \frac{2+i}{3} & \frac{-1+i}{3} \\ \frac{1-i}{6} & \frac{-1+i}{3} & \frac{1+5i}{6} \end{Vmatrix}.$$

7.2.43. Démontrer que, dans l'énoncé du problème 7.2.40, les opérateurs $A+B$, AB et BA, aussi bien que les opérateurs A et B, sont normaux.

7.2.44*. Démontrer la réciproque partielle suivante de la proposition 7.2.43 : si A, B et AB sont des opérateurs normaux et si au moins l'un des opérateurs A ou B possède non seulement des valeurs propres simples, mais aussi des valeurs propres distinctes en module, alors A et B sont des opérateurs commutables.

7.2.45*. Démontrer la proposition suivante qui renforce 7.2.44 : soient A, B et AB des opérateurs normaux et supposons qu'au moins l'un des opérateurs A ou B ne possède pas de valeurs propres distinctes de même module. Alors, A et B sont commutables.

7.2.46. Donner un exemple d'opérateurs normaux A et B tels que les opérateurs AB et BA soient normaux et distincts.

7.2.47. On appelle *rayon spectral* $\varrho(A)$ d'un opérateur A le module maximal de ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:
$$\varrho(A)=\max_i |\lambda_i|.$$
Démontrer la caractéristique extrémale suivante du rayon spectral de l'opérateur normal A :
$$\varrho(A)=\max_{x\neq 0}\frac{|(Ax, x)|}{(x, x)}.$$
Que peut-on dire des vecteurs pour lesquels on obtient ce maximum?

7.2.48. Démontrer que l'estimation
$$\varrho(A)\geq\frac{1}{n}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right|$$
du rayon spectral d'une matrice normale A d'ordre $n\times n$ est vraie.

7.2.49. Démontrer que le rayon spectral d'un opérateur normal A vérifie la formule
$$\varrho(A)=\max_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|}.$$
Tout vecteur x qui réalise ce maximum est-il vecteur propre de l'opérateur A?

7.2.50*. Soient R un espace euclidien, C l'espace unitaire obtenu de R par complexification (cf. 2.5.14). Montrer que la correspondance entre les opérateurs A de R et les opérateurs $\hat{A}$ de C (cf. 5.1.52) :

a) à l'opérateur adjoint A^* associe l'opérateur adjoint $\hat{A}^*$;

b) à l'opérateur normal A associe l'opérateur normal $\hat{A}$.

En utilisant b) montrer que si λ est une valeur propre de l'opérateur normal A, la multiplicité géométrique de ce dernier coïncide avec sa multiplicité algébrique.

§ 7.3. Opérateurs et matrices unitaires

Présentation des problèmes du paragraphe. La première partie du paragraphe est consacrée aux opérateurs unitaires. Parmi leurs propriétés nous mettons surtout l'accent sur les deux suivantes : caractéristique spectrale (un opérateur unitaire est un opérateur normal dont toutes les valeurs propres sont égales à l'unité en module) et conservation du produit scalaire.

Dans la seconde partie du paragraphe nous traitons des matrices unitaires. Après avoir discuté leurs propriétés formelles, nous introduisons la notion de similitude unitaire des matrices et formulons les analogues matriciels de plusieurs propositions déjà connues sur les opérateurs. Enfin, nous donnons des applications numériques importantes de certaines matrices unitaires de forme spéciale.

7.3.1. Montrer que l'ensemble des opérateurs unitaires de ω_{XX} forme un groupe multiplicatif.

7.3.2. Montrer que dans le cas général la somme des opérateurs unitaires n'est déjà plus un opérateur unitaire.

7.3.3. Montrer que le produit d'un opérateur unitaire par un nombre α est un opérateur unitaire si et seulement si $|\alpha| = 1$.

7.3.4. Décrire tous les opérateurs unitaires d'un espace unidimensionnel.

7.3.5. Montrer qu'un opérateur de rotation d'un plan euclidien est un opérateur orthogonal.

7.3.6. Un opérateur de l'espace euclidien tridimensionnel $Ax = [x, a]$ est-il orthogonal?

7.3.7. Montrer que les opérateurs du problème 7.2.9 sont orthogonaux.

7.3.8. Soit dans l'espace M_n $(n \geq 1)$ le produit scalaire donné par la formule (7.1.9). Dans un tel espace euclidien les opérateurs du problème 7.2.9 sont-ils orthogonaux?

7.3.9. Soit A un opérateur normal de l'espace unitaire tridimensionnel. Démontrer que si les vecteurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de cet opérateur considérés comme des points d'un plan complexe ne sont pas alignés, A peut être mis sous la forme

$$A = aE + \varrho U,$$

où U est un opérateur unitaire, a un nombre complexe, $\varrho > 0$.

7.3.10. Un opérateur de projection peut-il être unitaire?

7.3.11. Montrer qu'un opérateur de réflexion orthogonale est un opérateur unitaire.

7.3.12. Montrer que les opérateurs du problème 7.2.9 sont des opérateurs de réflexion orthogonale. Trouver les sous-espaces propres de chacun d'eux.

7.3.13*. Dans la base 1, t, t^2 de l'espace M_2 la matrice de l'opérateur A est

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Montrer que A est un opérateur de réflexion. Introduire dans M_2 un produit scalaire de façon que A soit un opérateur orthogonal.

7.3.14. Prouver que l'opérateur normal A qui satisfait à la condition $A^k=E$ pour un entier $k\neq 0$ est un opérateur unitaire.

7.3.15. Démontrer que le déterminant d'un opérateur unitaire est égal à l'unité en module.

7.3.16*. Un opérateur orthogonal Q de l'espace des polynômes M_2 muni du produit scalaire (7.1.1) transforme les polynômes $1+t+t^2$ et $1-t^2$ en $-1-t+t^2$ et $1-t$ respectivement. Le déterminant de cet opérateur est -1. Trouver sa matrice dans la base $1, t, t^2$.

7.3.17. Démontrer que, si U est un opérateur unitaire,

$$(Ux, Uy)=(x, y),$$

quels que soient les vecteurs x et y, c'est-à-dire un opérateur unitaire conserve le produit scalaire. Inversement, si un opérateur linéaire U conserve le produit scalaire de deux vecteurs quelconques, U est alors un opérateur unitaire.

7.3.18. Un opérateur de l'espace arithmétique R_4 muni du produit scalaire (7.1.4) transforme les vecteurs $x_1=(2, 2, 2, 2)$; $x_2=(2, 0, 2, 2)$; $x_3=(2, 2, 0, 2)$; $x_4=(2, 2, 2, 0)$ en vecteurs $y_1=(4, 0, 0, 0)$; $y_2=(3, -1, 1, 1)$; $y_3=(3, 1, -1, 1)$; $y_4=(3, 1, 1, -1)$ respectivement. Cet opérateur sera-t-il un opérateur orthogonal?

7.3.19. Démontrer que pour qu'un opérateur linéaire d'un espace X soit unitaire il suffit qu'il conserve les produits scalaires des vecteurs d'une base de l'espace X. En particulier, un opérateur est unitaire s'il transforme une base orthonormée encore en une base orthonormée.

7.3.20*. Démontrer que pour qu'un opérateur linéaire U d'un espace X soit unitaire il suffit que U conserve les longueurs de tous les vecteurs de X.

7.3.21*. Démontrer qu'un opérateur linéaire qui conserve l'orthogonalité de deux vecteurs quelconques ne se distingue que par un facteur numérique d'un certain opérateur unitaire.

7.3.22. Prouver que la condition d'unitarité d'une matrice U équivaut à ce que les colonnes (resp. lignes) de U envisagées comme des vecteurs d'un espace arithmétique à produit scalaire (7.1.4) forment une base orthonormée de cet espace.

7.3.23. Démontrer que toute matrice des permutations est une matrice unitaire.

7.3.24. Démontrer que chaque élément d'une matrice unitaire est égal en module à son mineur complémentaire.

7.3.25. Soit $U=P+iQ$ une matrice unitaire complexe d'ordre n. Démontrer que la matrice réelle d'ordre $2n$

$$D=\begin{Vmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{Vmatrix}$$

est orthogonale.

7.3.26. Démontrer que si U est une matrice unitaire, son associée U_p est encore une matrice unitaire.

7.3.27. Démontrer que la somme des carrés des modules de tous les mineurs d'ordre k choisis parmi k lignes (resp. colonnes) arbitraires d'une matrice unitaire est égale à un.

7.3.28. Supposons que le mineur principal directeur d'ordre k d'une matrice unitaire U soit égal à l'unité en module. Démontrer que dans ce cas U est de la forme quasi diagonale

$$U=\left\|\begin{matrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{matrix}\right\|,$$

où U_{11} est un bloc d'ordre k.

7.3.29. Démontrer que le produit kroneckerien des matrices unitaires U et V dont l'ordre peut être distinct est encore une matrice unitaire.

7.3.30. Soient U et V des matrices unitaires d'ordre $n\times n$. Montrer que

a) l'opérateur G_{UV} (cf. 5.6.10) est unitaire;

b) l'opérateur F_{UV} n'est pas unitaire en général.

7.3.31. Montrer que, pour un couple de bases orthonormées d'un espace unitaire, la matrice de passage est une matrice unitaire.

7.3.32. Les matrices A et B sont dites *unitairement semblables* s'il existe une matrice unitaire U telle que $B=U^{-1}AU$. Montrer que la relation de similitude unitaire sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n donné est réflexive, symétrique et transitive.

7.3.33. Démontrer que toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire.

7.3.34. Démontrer qu'une matrice triangulaire supérieure est unitairement semblable à une certaine matrice triangulaire inférieure.

7.3.35. Montrer que dans une transformation unitairement semblable une matrice normale se transforme en une matrice normale.

7.3.36. Montrer qu'une matrice complexe normale est unitairement semblable à une matrice diagonale.

7.3.37. Trouver la condition dont l'observation rend unitaire la matrice de la forme

$$\begin{matrix} \\ \\ i\text{-ième ligne} \\ \\ j\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}\left\|\begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cos\varphi\cdot e^{i\psi_1} \ldots & -\sin\varphi\cdot e^{i\psi_2} & \\ & & \vdots \quad \ddots & \vdots & \\ & & \sin\varphi\cdot e^{i\psi_3} \ldots & \cos\varphi\cdot e^{i\psi_4} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\| \qquad (7.3.1)$$

(les éléments hors diagonaux non indiqués sont nuls). La matrice unitaire obtenue s'appelle *matrice unitaire élémentaire:* dans ce qui suit elle est notée T_{ij}.

7.3.38. Soit A une matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$). Choisir la matrice unitaire élémentaire T_{ij} telle que dans la matrice $B = T_{ij}A$ l'élément (j, i) soit nul. On peut aussi poser (cf. 7.3.37) que $\psi_1 = \psi_4 = 0$.

7.3.39. Comment choisir pour la matrice donnée A d'ordre n la suite des matrices unitaires élémentaires $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ telle que dans le produit $T^{(2)}T^{(1)}A$ tous les éléments sous-diagonaux de la première colonne soient nuls?

7.3.40*. En se basant sur 7.3.38 et 7.3.39 construire la méthode de décomposition d'une matrice carrée en un produit des matrices unitaire et triangulaire supérieure.

7.3.41. Démontrer que toute matrice unitaire se décompose en un produit des matrices unitaires élémentaires, et il se peut en un produit des matrices unitaires élémentaires par une matrice unitaire diagonale.

7.3.42. Soient $A = U_1R_1$ et $A = U_2R_2$ deux décompositions d'une matrice non dégénérée A en un produit des matrices unitaire et triangulaire supérieure. Démontrer que

$$U_2 = U_1Q, \quad R_1 = QR_2,$$

où Q est une certaine matrice unitaire diagonale.

7.3.43. Comment appliquer la méthode construite dans 7.3.40 à la résolution d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ à matrice des coefficients carrée non dégénérée?

7.3.44. Trouver la condition à imposer à un vecteur colonne w pour que son observation rend unitaire la matrice de la forme

$$H = E - 2ww^*. \qquad (7.3.2)$$

7.3.45. Soit w un vecteur colonne normé. Démontrer que la matrice (7.3.2) qui lui correspond envisagée comme un opérateur d'un espace arithmétique donne dans cet espace une réflexion orthogonale. Une telle matrice H s'appelle *matrice de réflexion.*

7.3.46. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice de réflexion.

7.3.47. Trouver le déterminant d'une matrice de réflexion.

7.3.48. Montrer que toute matrice unitaire dont toutes les valeurs propres sont égales à $+1$ ou à -1, -1 étant une valeur propre simple, peut être mise sous la forme (7.3.2).

7.3.49. Montrer que la matrice

$$T = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix}$$

est une matrice de réflexion. Trouver le vecteur w correspondant.

7.3.50. Soit H une matrice de réflexion à vecteur connu w. Comment calculer le produit de H par le vecteur colonne x de façon que ce calcul n'exige que $(2n+1)$ multiplications?

7.3.51. Choisir le vecteur w de façon que la matrice de réflexion qu'il engendre transforme le vecteur donné x en un vecteur colinéaire à la colonne e_1 (en supposant que le vecteur x lui-même n'est pas colinéaire à e_1).

7.5.52*. Utiliser le résultat du problème 7.3.51 pour construire l'algorithme de décomposition d'une matrice carrée en un produit des matrices unitaire et triangulaire supérieure.

7.3.53. Soit $Ax=b$ un système d'équations linéaires à matrice carrée A non dégénérée. Décrire la méthode de résolution de ce système fondée sur le processus construit dans 7.3.52.

7.3.54*. Soit A une matrice carrée d'ordre n ($n>2$). Comment choisir la matrice de réflexion H de façon que les éléments de toutes les cases de la première colonne de la matrice $B=HAH^*$, à partir de la troisième case, soient nuls?

7.3.55. La matrice B est dite *quasi triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si $b_{ij}=0$ pour $i>j+1$ ($j>i+1$). Démontrer à l'aide du résultat du problème 7.3.54 que toute matrice carrée est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Donner une formulation opératorielle de cette proposition.

§ 7.4. Opérateurs et matrices hermitiens

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans la première partie du paragraphe on traite des propriétés les plus simples des opérateurs et des matrices hermitiens. La discussion se poursuit sur le même plan que dans les paragraphes précédents. Les problèmes de la deuxième partie concernent les valeurs propres des opérateurs hermitiens. Leurs propriétés extrémales remarquables sont examinées avec une attention particulière. L'application de ces propriétés est à la base de l'une des méthodes les plus efficaces de la recherche des valeurs propres des matrices hermitiennes, qui est la méthode de bissection décrite dans les problèmes 7.4.43-7.4.48.

7.4.1. Montrer que l'ensemble des opérateurs hermitiens de ω_{XX} forme un groupe additif.

7.4.2. Montrer que dans l'espace vectoriel ω_{XX} de tous les opérateurs linéaires agissant dans un espace euclidien X l'ensemble des opérateurs symétriques est un sous-espace vectoriel. Une proposition analogue est vraie pour l'ensemble des opérateurs antisymétriques de ω_{XX}.

7.4.3. Montrer que le produit d'un opérateur hermitien non nul par un nombre α est un opérateur hermitien si et seulement si α est un nombre réel.

7.4.4. Montrer qu'un opérateur K est antihermitien si et seulement si l'opérateur iK est hermitien.

7.4.5. Montrer que le produit des opérateurs hermitiens H_1 et H_2 est un opérateur hermitien si et seulement si H_1 et H_2 sont commutables.

7.4.6. Montrer que l'inverse d'un opérateur hermitien non dégénéré est encore hermitien.

7.4.7. Décrire tous les opérateurs hermitiens qui agissent dans un espace unidimensionnel.

7.4.8. Un opérateur linéaire A agit dans un espace euclidien bidimensionnel; en outre, pour un certain couple de vecteurs non colinéaires x et y,

$$(Ax, y)=(x, Ay).$$

Démontrer que A est un opérateur symétrique.

7.4.9. Montrer qu'un opérateur de l'espace euclidien tridimensionnel $Ax=[x, a]$ est antisymétrique.

7.4.10*. Démontrer que tout opérateur antisymétrique K de l'espace euclidien tridimensionnel peut être mis sous la forme $Kx=[x, a]$ par un choix convenable du vecteur a.

7.4.11. Un opérateur de l'espace arithmétique R_4 muni du produit scalaire (7.1.4) transforme les vecteurs $x_1=(0, 1, 1, 1)$; $x_2=(-1, 0, 1, 1)$; $x_3=(-1, -1, 0, 1)$; $x_4=(-1, -1, -1, 0)$ en vecteurs $y_1=(3, -1, -1, -1)$; $y_2=(1, -3, -1, -1)$; $y_3=(-1, -3, -1, 1)$; $y_4=(-3, -1, -1, 1)$ respectivement. Cet opérateur sera-t-il symétrique?

7.4.12. Montrer que les opérateurs du problème 7.2.9 sont symétriques.

7.4.13. Montrer que tout opérateur de réflexion orthogonale est un opérateur hermitien. En particulier, la matrice de réflexion (7.3.2) est une matrice hermitienne.

7.4.14. Montrer qu'un opérateur unitaire et hermitien simultanément ou bien est égal à $\pm E$, ou bien est un opérateur de réflexion orthogonale.

7.4.15*. L'opérateur symétrique S de l'espace des polynômes M_2 à produit scalaire (7.1.1) transforme les polynômes $2+2t-t^2$ et $2-t+2t^2$ en polynômes $5-t-t^2$ et $3+3t+3t^2$ respectivement. La trace de cet opérateur est égale à 3. Trouver sa matrice dans la base $1, t, t^2$.

7.4.16. Soient H_1 et H_2 des matrices hermitiennes complexes de même ordre. Démontrer que la trace de la matrice H_1H_2 est un nombre réel.

7.4.17. Supposons qu'une matrice hermitienne H soit mise sous la forme $H=S+iK$, où S et K sont des matrices réelles. Montrer que S est une matrice symétrique, et K une matrice antisymétrique.

7.4.18. Démontrer que dans l'énoncé du problème 7.4.17 la matrice réelle

$$D=\begin{Vmatrix} S & -K \\ K & S \end{Vmatrix}$$

est symétrique.

7.4.19. Démontrer que si H est une matrice hermitienne l'associée H_p est encore hermitienne.

7.4.20. Démontrer que le produit kroneckerien des matrices hermitiennes H_1 et H_2, qui, il se peut, admettent un ordre distinct, est encore une matrice hermitienne.

7.4.21. Soient H_1 et H_2 des matrices hermitiennes d'ordre $n\times n$. Montrer que les opérateurs $G_{H_1H_2}$ et $F_{H_1H_2}$ du problème 5.6.10 sont des opérateurs hermitiens.

7.4.22. Démontrer que pour un opérateur hermitien H le produit scalaire (Hx, x) est un nombre réel quel que soit le vecteur x.

7.4.23. Soit K un opérateur antisymétrique d'un espace euclidien X. Démontrer que $(Kx, x)=0$ pour tout vecteur x de X.

7.4.24. Que peut-on dire d'un opérateur hermitien H si $(Hx, x)=0$ pour tout vecteur x?

7.4.25. Montrer que, si pour des opérateurs hermitiens H_1 et H_2 l'égalité $(H_1x, x)=(H_2x, x)$ est vérifiée quel que soit le vecteur x, alors $H_1=H_2$.

7.4.26. Démontrer la réciproque de 7.2.18 : si, quel que soit le vecteur x, un opérateur linéaire A vérifie l'égalité (7.2.2), alors A est un opérateur normal.

7.4.27. Les valeurs propres d'un opérateur normal A qui agit dans un espace unitaire sont alignées sur un plan complexe. Démontrer que l'opérateur A peut être mis sous la forme

$$A=aE+\alpha H,$$

où H est un opérateur hermitien, a et α des nombres complexes, $|\alpha|=1$.

7.4.28. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur antihermitien sont des nombres purement imaginaires.

7.4.29. Montrer qu'un opérateur de projection orthogonale est un opérateur hermitien.

Dans les problèmes 7.4.30-7.4.37 on suppose que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'un opérateur hermitien (ou d'une matrice hermitienne) H sont indicées de façon que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n. \tag{7.4.1}$$

Si, tout en examinant les valeurs propres, on considère la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ de vecteurs propres de l'opérateur H, on adopte que la numérotation des vecteurs dans cet opérateur correspond à la mise en ordre (7.4.1).

7.4.30. Démontrer la validité des représentations suivantes des valeurs propres maximale et minimale de l'opérateur hermitien H :

$$\lambda_1 = \max_{x\neq 0} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_n = \min_{x\neq 0} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}. \tag{7.4.2}$$

Montrer que les vecteurs pour lesquels on obtient les extrémums indiqués sont des vecteurs propres de H.

7.4.31. Montrer que les valeurs propres extrémales d'une matrice hermitienne H vérifient les estimations suivantes :

$$\lambda_1 \geq \max_i h_{ii}, \quad \lambda_n \leq \min_i h_{ii}.$$

7.4.32. Supposons qu'une matrice hermitienne H donne lieu à l'égalité $\lambda_1=h_{ii}$. Démontrer que tous les éléments hors diagonaux de la i-ième ligne et de la i-ième colonne de la matrice H sont des zéros.

7.4.33. Démontrer que pour le sous-espace vectoriel L tendu sur les vecteurs propres $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$ d'un opérateur hermitien H on vérifie les relations

$$\lambda_{i_1} = \max_{\substack{x\neq 0\\ x\in L}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_{i_k} = \min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}. \tag{7.4.3}$$

7.4.34*. Démontrer le *théorème de Courant-Fischer* suivant : pour une valeur propre λ_k d'un opérateur hermitien H qui agit dans un espace X de dimension n, les représentations

$$\lambda_k = \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \tag{7.4.4}$$

$$\lambda_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_{n-k+1}}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)} \tag{7.4.5}$$

sont vraies. Dans l'égalité (7.4.4), le maximum est pris par rapport à tous les sous-espaces L_k de dimension k de l'espace X; d'une façon analogue, dans (7.4.5), L_{n-k+1} désigne un sous-espace arbitraire de dimension $n-k+1$.

7.4.35*. Soit H_{n-1} une sous-matrice principale d'une matrice hermitienne H d'ordre n. En appliquant le théorème de Courant-Fischer, démontrer que les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ *séparent* les valeurs propres de la matrice H. Ceci signifie que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n .$$

7.4.36. Sans calculer les valeurs propres de la matrice H d'ordre n

$$H = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 \ldots & n-1 & n \end{matrix} \right\| ,$$

indiquer le nombre de valeurs propres non nulles et leurs signes.

7.4.37. Supposons que le rang d'une matrice hermitienne H dépasse de deux unités le rang de la sous-matrice principale H_{n-1}. Démontrer que la matrice H possède une valeur propre positive et une valeur propre négative de plus que H_{n-1}.

7.4.38. Supposons que les valeurs propres des opérateurs hermitiens H_1, H_2, et H_1+H_2 sont indicés dans l'ordre décroissant

$$\begin{aligned} H_1 &— \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n , \\ H_2 &— \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n , \\ H_1 + H_2 &— \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n . \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

En utilisant le théorème de Courant-Fischer démontrer que les inégalités ($k=1, 2, \ldots, n$)

$$\gamma_k \leq \alpha_1 + \beta_k, \quad \gamma_k \leq \alpha_k + \beta_1,$$
$$\gamma_k \geq \alpha_n + \beta_k, \quad \gamma_k \geq \alpha_k + \beta_n$$

sont vraies.

7.4.39. Montrer que dans une transformation unitairement semblable une matrice hermitienne est associée encore à une matrice hermitienne.

7.4.40. Une matrice bande est dite *tridiagonale* si la largeur de la bande est égale à 3. Déduire du problème 7.3.55 le corollaire suivant : toute matrice hermitienne est unitairement semblable à une matrice tridiagonale. Donner la formulation opératorielle de cette proposition.

7.4.41. Disons qu'une matrice tridiagonale C est *irréductible* si $c_{ij} \neq 0$ pour $|i-j|=1$. Démontrer qu'une matrice hermitienne tridiagonale qui admet une valeur propre λ de multiplicité r est une matrice quasi diagonale; de plus, la diagonale compte au moins r sous-matrices irréductibles d'un ordre plus petit.

Pour la matrice hermitienne irréductible tridiagonale C d'ordre n des problèmes 7.4.42-7.4.49 qui suivent, on considère la suite des polynômes $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, où $f_0(\lambda) \equiv 1$ et $f_i(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la sous-matrice principale directrice C_i de la matrice C (de façon que le polynôme $f_i(\lambda)$ soit de degré i). Les récurrences qui associent les polynômes de ce système ont été obtenues dans le problème 3.2.46 (dans notre cas hermitien, $c_i = \bar{b}_i$) et sont utilisées dans ce qui suit sans aucune référence. Les racines du polynôme $f_i(\lambda)$, c'est-à-dire les valeurs propres de la sous-matrice C_i, sont notées $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_i^{(i)}$ et indicées dans l'ordre décroissant de façon que $\lambda_1^{(i)} \geq \lambda_2^{(i)} \geq \ldots \geq \lambda_i^{(i)}$ (cf. 7.4.43, b)); de plus, $\lambda_i^{(n)} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$.

7.4.42. Composer la suite de polynômes $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_5(\lambda)$ de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{7.4.7}$$

7.4.43. Démontrer que dans le système de polynômes $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, f_n(\lambda)$:

a) les polynômes voisins n'ont pas de racines communes;

b) les racines du polynôme $f_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq n-1$ séparent *strictement* les racines du polynôme $f_{i+1}(\lambda)$:

$$\lambda_1^{(i+1)} > \lambda_1^{(i)} > \lambda_2^{(i+1)} > \lambda_2^{(i)} > \ldots > \lambda_i^{(i+1)} > \lambda_i^{(i)} > \lambda_{i+1}^{(i+1)};$$

c) si $\lambda_k^{(i)}$, $i<n$, est la racine du polynôme $f_i(\lambda)$, les nombres $f_{i-1}(\lambda_k^{(i)})$ et $f_{i+1}(\lambda_k^{(i)})$ sont de signes opposés.

7.4.44*. Le nombre réel μ n'est racine d'aucun des polynômes $f_i(\lambda)$. Démontrer que le nombre de changements de signes de la suite numérique

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_n(\mu) \tag{7.4.8}$$

est égal au nombre de valeurs propres de la matrice C [c'est-à-dire de racines du polynôme $f_n(\lambda)$] qui sont strictement plus grandes que μ.

7.4.45*. Supposons maintenant que le nombre μ peut être racine des polynômes du système $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$. Calculons comme auparavant

le nombre de changements de signes de la suite (7.4.8) en affectant à chaque valeur nulle de $f_i(\mu)$ le même signe que celui du nombre $f_{i-1}(\mu)$. Démontrer que dans ce cas-là aussi la proposition 7.4.44 est encore vraie.

7.4.46*. On sait que la valeur propre λ_k d'une matrice C repose dans l'intervalle (a, b). On dit dans ce cas que λ_k est *localisé* dans (a, b). Comment en appliquant le résultat des problèmes 7.4.44-7.4.45 localiser λ_k dans un intervalle deux fois plus petit?

7.4.47. Soient toutes les valeurs propres d'une matrice C appartenant à l'intervalle (m, M). En partant des résultats du problème 7.4.46 indiquer comment trouver les nombres λ_i à ε donné près.

7.4.48. Montrer que le calcul de la suite (7.4.8) peut être arrangé de façon qu'il faille effectuer seulement $2(n-1)$ multiplications [en supposant que les nombres $|b_i|^2$ figurant dans les récurrences associant les polynômes $f_i(\lambda)$ sont calculés à l'avance].

7.4.49. Le procédé de calcul des valeurs propres d'une matrice hermitienne tridiagonale obtenu dans le problème 7.4.47 s'appelle *méthode de bissection*. Réaliser la méthode de bissection pour calculer la valeur propre maximale de la matrice (7.4.7) à $\varepsilon=1/16$ près.

7.4.50*. En s'appuyant sur les résultats des problèmes 7.4.40, 7.4.41, 7.4.47, décrire la méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice hermitienne arbitraire.

7.4.51*. Une matrice irréductible tridiagonale A est dite *jacobienne* si $a_{i,i+1}a_{i+1,i}>0$ pour tout i. Montrer que les matrices jacobiennes à éléments diagonaux réels vérifient les résultats des problèmes 7.4.43-7.4.47.

7.4.52. En utilisant la correspondance entre les vecteurs d'un espace euclidien R et de l'espace unitaire C obtenu à partir de R par complexification, démontrer que

a) à l'opérateur symétrique S de l'espace R correspond l'opérateur hermitien $\hat{S}$ de l'espace C;

b) pour tout opérateur symétrique de l'espace R il existe dans R une base orthonormée telle que la matrice de cet opérateur soit diagonale.

Reformuler la proposition b) pour les matrices.

7.4.53. Soient $z_1, \ldots, z_n$, $z_j=x_j+iy_j$, une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice hermitienne $H=S+iK$ d'ordre $n\times n$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Démontrer que les vecteurs colonnes réels $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ de dimension $2n$, où

$$u_j=\begin{Vmatrix} x_j \\ y_j \end{Vmatrix}, \quad v_j=\begin{Vmatrix} -y_j \\ x_j \end{Vmatrix},$$

forment une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice réelle

$$D=\begin{Vmatrix} S & -K \\ K & S \end{Vmatrix};$$

les valeurs propres correspondantes sont $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_n$.

§ 7.5. Opérateurs et matrices non négatifs et définis positifs

Présentation des problèmes du paragraphe. Voici les questions essentielles traitées dans ce paragraphe :

Propriétés formelles des opérateurs non négatifs et définis positifs qui se déduisent immédiatement de leurs définitions.

Matrices définies positives et matrices de Gram. Nous montrons ici que dans un certain sens les matrices définies positives sont un outil universel pour introduire un produit scalaire dans un espace vectoriel donné.

La non-négativité (resp. la positivité) des valeurs propres d'un opérateur (resp. d'une matrice) non négatif (resp. défini positif).

Critères différents de la définissabilité positive des matrices hermitiennes, en particulier, la domination diagonale (cf. 7.5.24), le critère de Sylvester, etc. Nous donnons également des problèmes de calcul pour leur application.

Relation d'ordre partiel sur l'ensemble des opérateurs hermitiens.

Racine carrée d'un opérateur non négatif, exemples numériques d'extraction d'une racine carrée.

Applications du théorème important sur les valeurs propres réelles d'un opérateur HS, où H et S sont des opérateurs hermitiens et S est défini positif.

7.5.1. Un opérateur défini positif H peut-il associer un vecteur non nul x à un vecteur y orthogonal à x?

7.5.2. Déduire de la définition d'un opérateur défini positif sa non-dégénérescence.

7.5.3. Soit H un opérateur défini positif d'un espace euclidien X. Montrer que pour tout vecteur non nul x de X son image forme avec x un angle aigu.

7.5.4. Soient H et S des opérateurs non négatifs. Montrer que, pour des nombres α et β non négatifs quelconques, l'opérateur $\alpha H+\beta S$ est non négatif.

7.5.5. Soient H et S des opérateurs non négatifs et supposons que pour certains nombres réels α_0 et β_0 l'opérateur $\alpha_0 H+\beta_0 S$ est défini positif. Montrer que dans ce cas tous les opérateurs $\alpha H+\beta S$, où α et β sont des nombres positifs arbitraires, sont définis positifs.

7.5.6. Démontrer que l'inverse d'un opérateur défini positif est encore un opérateur défini positif.

7.5.7. Montrer que tout opérateur de projection orthogonale est non négatif.

7.5.8. Soit H une matrice complexe définie positive. Démontrer que sa transposée H^T est également définie positive.

7.5.9. Prouver que toute sous-matrice principale d'une matrice non négative (resp. définie positive) est encore une matrice non négative (resp. définie positive).

7.5.10*. Soit $x_1, \ldots, x_k$ un système arbitraire de vecteurs d'un espace unitaire (euclidien) X. Démontrer qu'une matrice de Gram du système $x_1, \ldots, x_k$ est une matrice non négative. Cette matrice est définie positive si le système $x_1, \ldots, x_k$ est linéairement indépendant.

7.5.11. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base arbitraire d'un espace unitaire (euclidien)

X. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques x et y de X peut se calculer d'après la formule

$$(x, y)=(\Gamma X_e, Y_e). \tag{7.5.1}$$

Ici Γ^T est la matrice de Gram du système $e_1, \ldots, e_n$; X_e, Y_e, des vecteurs colonnes de dimension n composés de coordonnées des vecteurs x et y dans la base $e_1, \ldots, e_n$; le produit scalaire du second membre de (7.5.1) est pris d'après la règle usuelle (7.1.4).

7.5.12. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base arbitraire d'un espace vectoriel X, Γ une matrice définie positive arbitraire. Montrer que dans X la formule (7.5.1) définit un produit scalaire. En outre, la matrice Γ^T est la matrice de Gram du système $e_1, \ldots, e_n$ au sens du produit scalaire obtenu.

Ainsi, la formule (7.5.1) (de même que la méthode du problème 2.1.2) donne un aperçu de tous les moyens possibles d'introduction d'un produit scalaire dans l'espace vectoriel X donné.

7.5.13. Soient $(x, y)_1$ et $(x, y)_2$ deux produits scalaires distincts d'un espace arithmétique. Démontrer que :

a) il existe une matrice non dégénérée A telle que

$$(x, y)_2=(Ax, y)_1;$$

b) on tire de a) que

$$(x, y)_1=(A^{-1}x, y)_2.$$

7.5.14. Soit A un vecteur linéaire arbitraire de l'espace unitaire (euclidien) X dans l'espace unitaire (euclidien) Y. Montrer que le produit A^*A est un opérateur non négatif de l'espace X, tandis que le produit AA^* est un opérateur non négatif de l'espace Y. Pour toute matrice rectangulaire A, les matrices A^*A et AA^* sont respectivement non négatives.

7.5.15. Soit H une matrice complexe définie positive. Démontrer que dans la représentation de H

$$H=S+iK,$$

où S et K sont des matrices réelles, S est définie positive.

7.5.16. Soient H un opérateur non négatif et $(Hx, x)=0$ pour un certain vecteur x. Démontrer que :

a) x appartient au noyau N_H de l'opérateur H;

b) l'opérateur H/T_H induit sur l'image T_H de H est défini positif.

7.5.17. Montrer qu'un opérateur défini positif peut être déterminé comme un opérateur non négatif non dégénéré.

7.5.18. Montrer qu'un opérateur hermitien H est non négatif (resp. défini positif) si et seulement si pour tout nombre ε positif (resp. non négatif) l'opérateur $H+\varepsilon E$ est non dégénéré.

7.5.19. Un opérateur hermitien H est dit *non positif* (resp. *défini négatif*) si pour tout vecteur non nul x le produit scalaire (Hx, x) est non positif (resp. négatif). La définition des *matrices non positives* et *définies négatives* est analogue.

Démontrer que tout opérateur hermitien peut être mis sous la forme d'une somme des opérateurs non négatif et non positif.

7.5.20*. Une matrice complexe carrée A est dite *stable* si pour toute valeur propre λ de cette matrice on vérifie la condition Re $\lambda < 0$.

Démontrer que si pour une matrice A d'ordre $n \times n$

$$A^*X + XA = C,$$

où C est une matrice définie négative, l'*équation matricielle de Liapounov* admet une solution B définie positive, alors A est une matrice stable. En déduire que B est une solution unique de l'équation donnée.

7.5.21. Que peut-on dire d'un opérateur non négatif H si sa trace est nulle?

7.5.22. Montrer que le déterminant d'un opérateur défini positif est positif. En déduire que dans une matrice définie positive tous les mineurs principaux sont positifs.

7.5.23. Montrer que dans une matrice définie positive l'élément maximal en module se trouve sur la diagonale principale.

7.5.24*. Démontrer qu'une matrice hermitienne H d'ordre $n \times n$ est définie positive si

$$h_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |h_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (7.5.2)$$

7.5.25. Soit $H = S + iK$ une matrice complexe définie positive. Démontrer que la matrice réelle

$$D = \begin{Vmatrix} S & -K \\ K & S \end{Vmatrix}$$

est définie positive.

7.5.26*. Soit H une matrice définie positive. Démontrer que son associée H_p est encore définie positive.

7.5.27. Démontrer que parmi tous les mineurs d'ordre k d'une matrice H définie positive, le plus grand en module est l'un quelconque des mineurs principaux.

7.5.28. Démontrer que le produit kroneckerien des matrices H_1 et H_2 définies positives mais, il se peut, d'un ordre distinct est encore une matrice définie positive.

7.5.29*. Soient A et B des matrices carrées de même ordre n. On appelle *produit de Schur* des matrices A et B la matrice C d'ordre $n \times n$ telle que

$$c_{ij} = a_{ij} b_{ij},$$

quels que soient i, j. Démontrer que le produit de Schur des matrices définies positives H_1 et H_2 est encore une matrice définie positive.

7.5.30. Soit H une matrice définie positive d'ordre n. Démontrer que la matrice S d'ordre $n \times n$ telle que $s_{ij} = |h_{ij}|^2$, quels que soient i, j, est encore définie positive.

7.5.31. Soient H et S des opérateurs hermitiens; de plus, la différence $H-S$ est un opérateur non négatif (resp. défini positif). Ecrivons dans ce cas $H \geq S(H > S)$. Montrer que la relation $\geq$ vérifie les propriétés :

a) $H \geq S,\ S \geq T \Rightarrow H \geq T$;

b) $H_1 \geq S_1,\ H_2 \geq S_2 \Rightarrow \alpha H_1 + \beta H_2 \geq \alpha S_1 + \beta S_2$, où α et β sont des nombres négatifs quelconques;

c) $H \geq S \Rightarrow A^*HA \geq A^*SA$ pour tout opérateur A.

7.5.32. Soient H et S des opérateurs hermitiens; de plus, $H \geq S$. Démontrer que les valeurs propres de l'opérateur S ordonnées dans l'ordre décroissant ne dépassent pas les valeurs propres de même indice (ordonnées dans le même ordre) de l'opérateur H.

7.5.33. Un opérateur H défini positif vérifie l'inégalité $H \geq E$. Démontrer que $H^{-1} \leq E$.

7.5.34. Les matrices H et S sont définies positives; en outre $H \geq S$. Démontrer que

a) $\max\limits_{i,j} |h_{ij}| \geq \max\limits_{i,j} |s_{ij}|$;

b) les mineurs principaux de S ne dépassent pas les mineurs de même indice de H; en particulier,

c) $\det H \geq \det S$.

7.5.35. L'élément diagonal h_{ii} d'une matrice définie positive H a été augmenté. Démontrer que le déterminant de la matrice obtenue $\tilde{H}$ est plus grand que celui de H.

7.5.36*. Démontrer le *critère de Sylvester* suivant de définissabilité positive : pour qu'une matrice hermitienne H soit définie positive il faut et il suffit que tous les mineurs principaux directeurs de cette matrice soient positifs.

7.5.37. Le mineur principal directeur d'ordre k d'une matrice non négative H est nul. Prouver que tous les mineurs principaux directeurs d'ordre supérieur à k sont nuls.

7.5.38. Prouver que dans une matrice définie négative H tous les mineurs principaux d'ordre impair sont négatifs, alors que tous les mineurs principaux d'ordre pair sont positifs.

Pour chacune des matrices tridiagonales d'ordre n ci-dessous déterminer si la matrice en question est définie positive ou non négative

7.5.39.
$$\left\| \begin{matrix} n-1 & 1 & & & & \\ 1 & n-2 & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & 2 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

7.5.40. $$\begin{Vmatrix} n-1 & 1 & & & & & \\ 1 & n-2 & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ & & & & \cdot & 1 & 1 \;\; 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.41. $$\begin{Vmatrix} n+1 & 1 & & & & \\ 1 & n & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & 4 & 1 \\ & & & \cdot & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

7.5.42*. $$\begin{Vmatrix} n & 1 & & & & & \\ 1 & n-1 & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & 3 & 1 \\ & & & & \cdot & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.43. $$\begin{Vmatrix} n^2 & 1 & & & & \\ 1 & (n-1)^2 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.44. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ & 1 & 2 & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.45*. Prouver que pour tout opérateur H non négatif (défini positif) il existe un opérateur K non négatif (défini positif) et un seul, tel que $K^2=H$. L'opérateur K s'appelle *racine carrée* (arithmétique) *de l'opérateur* H notée $H^{1/2}$.

Trouver les racines carrées des matrices suivantes :

7.5.46. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$. **7.5.47.** $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

7.5.48. $\begin{Vmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{Vmatrix}$. **7.5.49.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.5.50*. En utilisant l'existence d'une racine carrée prouver que le déterminant d'une matrice définie positive H d'ordre n vérifie l'inégalité

$$\det H \leq h_{11}h_{22}\dots h_{nn}.$$

Dans ce cas l'égalité a lieu si et seulement si H est une matrice diagonale.

7.5.51*. Une matrice carrée définie positive H est mise sous la forme partitionnée

$$H=\begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{Vmatrix},$$

où H_{11} et H_{22} sont des matrices carrées. Démontrer que

$$\det H \leq \det H_{11} \leq \det H_{22};$$

de plus, l'égalité s'obtient si et seulement si $H_{12}=0$.

7.5.52. Soient H et S des opérateurs hermitiens; en outre, S est un opérateur non négatif. Démontrer que si H et S sont commutables, H et $S^{1/2}$ le sont aussi.

7.5.53*. Les opérateurs H et S sont définis positifs et $H \geq S$. Démontrer que $H^{-1} \leq S^{-1}$.

7.5.54. Montrer que le produit HS des opérateurs non négatifs commutables H et S est encore un opérateur non négatif.

7.5.55. Soient $H \geq S$ et T un opérateur non négatif, commutable avec H et S. Démontrer que $HT \geq ST$.

7.5.56*. Soient H et S des opérateurs hermitiens; de plus, S est défini positif. Prouver que les valeurs propres de l'opérateur HS sont des nombres réels; en outre, l'opérateur lui-même est de structure simple.

7.5.57. Supposons que dans l'énoncé du problème 7.5.56 l'opérateur H est non négatif. Montrer que toutes les valeurs propres de HS sont non négatives.

7.5.58. Montrer que la réciproque de 7.5.57 est vraie : si H et S sont des opérateurs hermitiens, S est défini positif et toutes les valeurs propres de HS sont non négatives, alors H est un opérateur non négatif.

7.5.59*. Soient H et S des matrices hermitiennes d'ordre n; de plus, S est une matrice définie positive. Démontrer que :

a) le premier membre de l'équation

$$\det(\lambda S - H) = 0 \tag{7.5.3}$$

est un polynôme de λ de degré n, dont le coefficient dominant est égal au déterminant de S;

b) l'équation (7.5.3) admet n racines réelles si chacune est répétée autant de fois que sa multiplicité l'indique.

7.5.60. Soient H et S des opérateurs définis positifs dont les valeurs propres maximales sont α_1 et β_1 respectivement. Démontrer que la valeur propre maximale γ_1 de l'opérateur HS vérifie l'inégalité $\gamma_1 \leq \alpha_1\beta_1$.

7.5.61*. Démontrer que dans l'énoncé du problème 7.5.15 les propositions suivantes sont vraies :

a) les valeurs propres de la matrice $iS^{-1}K$ sont réelles et inférieures à l'unité en module;

b) $\det S \geq \det H$; en outre, l'égalité a lieu si et seulement si $H = S$;

c) $\det S > \det K$.

7.5.62*. Soient A un opérateur de rang r de l'espace X de dimension n dans l'espace Y de dimension m, $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur non négatif A^*A; de plus, les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ correspondent aux valeurs propres non nulles $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$ ($\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$). Démontrer que :

a) les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ forment une base du noyau N_A de l'opérateur A;

b) les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ forment une base de l'image T_{A^*} de l'opérateur adjoint A^*;

c) les vecteurs $Ae_1, \ldots, Ae_r$ sont orthogonaux et forment une base de l'image T_A de A;

d) la longueur du vecteur Ae_i est égale à α_i, $i = 1, \ldots, r$;

e) chacun des vecteurs Ae_i est un vecteur propre de l'opérateur AA^* et qui, de plus, est associé à la valeur propre α_i^2;

f) si l'on adopte

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} Ae_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

on a

$$A^*f_i = \alpha_i e_i.$$

§ 7.6. Nombres singuliers et décomposition polaire

Présentation des problèmes du paragraphe. En parlant des nombres singuliers nous portons surtout l'attention sur les diverses méthodes qui dans des cas concrets permettent de faciliter leur calcul ou leur estimation. Les nombres singuliers qui s'emploient surtout dans des problèmes métriques et leurs applications sont décrits au § 7.8 et dans le chapitre

suivant. Quant à ce paragraphe-là, nous n'y donnons que certaines inégalités qui associent les nombres singuliers aux valeurs propres d'un opérateur. Nous traitons avec force détails de la décomposition singulière d'une matrice rectangulaire arbitraire et de la décomposition polaire de ω_{XX} et d'une matrice carrée.

Dans tous les problèmes les nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont supposés numérotés dans l'ordre décroissant :

$$\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_s.$$

7.6.1. En connaissant les nombres singuliers d'un opérateur A, trouver les nombres singuliers a) de l'opérateur A^*; b) de l'opérateur αA, α étant un nombre complexe arbitraire.

7.6.2. Prouver que dans la multiplication d'un opérateur par des opérateurs unitaires, ses nombres singuliers ne changent pas.

7.6.3. Supposons qu'un opérateur A agit dans un espace X. Montrer que A est non dégénéré si et seulement si tous les nombres singuliers de cet opérateur sont différents de zéro.

7.6.4. Prouver que le module du déterminant d'un opérateur est égal au produit de ses nombres singuliers.

7.6.5. En supposant qu'un opérateur A est non dégénéré, trouver la relation entre les nombres singuliers des opérateurs A et A^{-1}.

7.6.6. Démontrer que les nombres singuliers d'un opérateur normal coïncident avec les modules de ses valeurs propres.

7.6.7. Démontrer qu'un opérateur A d'un espace unitaire est unitaire si et seulement si tous les nombres singuliers de cet opérateur sont égaux à un.

7.6.8*. Dans l'espace des polynômes M_n muni de produit scalaire (7.1.7) trouver les nombres singuliers de l'opérateur de dérivation.

7.6.9*. Trouver les nombres singuliers de l'opérateur de dérivation de l'espace des polynômes M_2, si le produit scalaire est donné par la formule (7.1.2). Comparer le résultat avec celui du problème 7.6.8.

7.6.10*. Soit A une matrice $m \times n$ rectangulaire de rang r réelle ou complexe. Démontrer que A peut être mise sous la forme

$$A = U\Lambda V, \tag{7.6.1}$$

où U et V sont des matrices orthogonales (unitaires) d'ordre m et n respectivement; Λ la matrice $m \times n$ telle que $\lambda_{11} \geq \lambda_{22} \geq \ldots \geq \lambda_{rr} > 0$, alors que les autres éléments sont nuls. La représentation (7.6.1) s'appelle *décomposition singulière de la matrice A*.

7.6.11. Montrer que la matrice Λ de la décomposition (7.6.1) est bien définie par la matrice A elle-même. Plus précisément, les nombres $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{rr}$ sont les valeurs propres non nulles de la matrice $(A^*/A)^{1/2}$ (de même que de la matrice $(AA^*)^{1/2}$).

7.6.12. Comment interpréter les matrices U et V de la décomposition singulière d'une matrice A?

7.6.13. Les matrices rectangulaires A et B de type $m \times n$ sont dites *unitairement équivalentes* s'il existe des matrices unitaires U et V telles que

$B=UAV$. Prouver que la relation d'équivalence unitaire sur l'ensemble des matrices $m\times n$ est réflexive, symétrique et transitive.

7.6.14. Démontrer que les matrices A et B de type $m\times n$ sont unitairement équivalentes si et seulement si elles possèdent les mêmes nombres singuliers.

7.6.15. Montrer que les matrices A et B sont unitairement équivalentes si et seulement si les matrices A^*A et B^*B sont semblables.

7.6.16. En connaissant la décomposition singulière $A=U\Lambda V$ d'une matrice A, carrée non dégénérée, trouver la décomposition singulière et les nombres singuliers des matrices a) A^T; b) A^*; c) A^{-1}.

7.6.17. Montrer que pour toute matrice A de type $m\times n$ il existe une matrice unitaire W d'ordre m telle que les lignes de la matrice WA soient orthogonales. D'une façon analogue, il existe une matrice unitaire Z d'ordre n telle que les colonnes de la matrice AZ soient orthogonales.

7.6.18. Les colonnes d'une matrice sont orthogonales. Démontrer que les nombres singuliers de cette matrice sont égaux aux longueurs de ses lignes.

7.6.19. Trouver les nombres singuliers d'une matrice de type $m\times n$ dont le rang est l'unité.

7.6.20. Soit A une matrice divisée en blocs de la forme

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

où A_1 et A_2 ne sont pas des matrices strictement carrées. Démontrer que les nombres singuliers non nuls des blocs A_1 et A_2 donnent dans l'ensemble tous les nombres singuliers non nuls de la matrice A. Cette proposition est également vraie pour la matrice divisée en blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6.21. Tirer de la proposition 7.6.20 le corollaire suivant : si un couple de sous-espaces orthogonaux L et M réduit un opérateur A, les nombres singuliers des opérateurs A/L et A/M donnent dans l'ensemble tous les nombres singuliers de A.

7.6.22. Démontrer que la décomposition singulière de la matrice A peut se mettre sous la forme

$$A=\tilde{U}\Lambda_r\tilde{V}, \tag{7.6.2}$$

où $\tilde{U}$ est une matrice de type $m\times r$ aux colonnes orthonormées; $\tilde{V}$ une matrice de type $r\times n$ aux lignes orthonormées; Λ_r une matrice diagonale aux éléments diagonaux positifs. La représentation (7.6.2) s'appelle également décomposition singulière de la matrice A.

7.6.23. Démontrer que les nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'un opérateur A vérifient la variante suivante du théorème de Courant-Fischer :

$$\alpha_k = \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Ax|}{|x|},$$

$$\alpha_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_{n-k+1}}} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Ici de même que dans 7.4.34, L_k et L_{n-k+1} sont des sous-espaces arbitraires de dimension k et $n-k+1$ respectivement d'un espace X de dimension n. En particulier, les relations

$$\alpha_1 = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}, \qquad \alpha_n = \min_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

sont vraies.

7.6.24. Démontrer que le rayon spectral d'un opérateur ne dépasse pas son nombre singulier maximal.

7.6.25. Démontrer que pour la valeur propre minimale en module λ_n et le nombre singulier minimal α_n d'un opérateur A, on vérifie la relation

$$|\lambda_n| \geq \alpha_n.$$

7.6.26. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les nombres singuliers d'une matrice A d'ordre $n \times n$. Démontrer que les nombres singuliers de l'associée A_p sont toutes sortes de produits p à p de nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7.6.27. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matrice A d'ordre $n \times n$ sont ordonnées de façon que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Démontrer que les *inégalités de Weyl* suivantes

$$|\lambda_1| \ldots |\lambda_k| \leq \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

$$|\lambda_k| \, |\lambda_{k+1}| \ldots |\lambda_n| \geq \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

qui généralisent 7.6.24 et 7.6.25 sont vraies.

· **7.6.28.** Démontrer que les nombres singuliers maximal et minimal de la matrice A d'ordre $n \times n$ donnent lieu aux estimations :

$$\alpha_1 \geq \max \left\{ \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \right\},$$

$$\alpha_n \leq \min \left\{ \min_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad \min_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

7.6.29*. L'opérateur A satisfait à l'égalité $|\lambda_1| = \alpha_1$. Ici λ_1 est la valeur propre maximale en module de A. Démontrer que les opérateurs A et A^* ont un vecteur propre commun associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_1(\lambda_1)$.

7.6.30*. Démontrer la réciproque de 7.6.6. : si les nombres singuliers d'un opérateur A coïncident avec les modules des valeurs propres, A est un opérateur normal.

7.6.31*. Soit A une matrice rectangulaire de type $m \times n$; $\tilde{A}$ une sous-matrice arbitraire de A. Démontrer que les nombres singuliers de $\tilde{A}$ ne dépassent pas les nombres singuliers de même indice de A.

7.6.32. Soit $\tilde{A}$ une sous-matrice normale arbitraire d'une matrice A. Démontrer que le rayon spectral de $\tilde{A}$ ne dépasse pas le rayon spectral de A.

7.6.33. Démontrer que les nombres singuliers α_k, β_k, γ_k des opérateurs A, B et $A+B$ vérifient les inégalités

$$\gamma_k \leq \alpha_1 + \beta_k, \quad \gamma_k \leq \alpha_k + \beta_1,$$
$$\gamma_k \geq -\alpha_1 + \beta_k, \quad \gamma_k \geq \alpha_k - \beta_1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

7.6.34*. Les opérateurs A et B agissent dans un espace X de dimension n. Démontrer que les nombres singuliers α_k, β_k, δ_k des opérateurs A, B, $A+B$ vérifient les relations

$$\delta_k \leq \alpha_1 \beta_k, \quad \delta_k \leq \alpha_k \beta_1,$$
$$\delta_k \geq \alpha_n \beta_k, \quad \delta_k \geq \alpha_k \beta_n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

7.6.35. Soient A et B des opérateurs définis positifs. Démontrer que les valeurs propres de l'opérateur AB sont égales aux carrés des nombres singuliers de l'opérateur $A^{1/2}B^{1/2}$.

7.6.36. On connaît les nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m$ des matrices A et B d'ordre n et m respectivement. Trouver les nombres singuliers du produit kroneckerien $A \times B$.

Trouver les nombres singuliers des matrices suivantes :

7.6.37. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

7.6.38. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.39. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$.

7.6.40. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$.

7.6.41. $\begin{Vmatrix} 4 & -3i & 0 \\ -3i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$.

7.6.42. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.43. $\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.44. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.45. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{Vmatrix}$. **7.6.46*.** $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.47. Comment se transforme la décomposition polaire d'une matrice d'ordre n avec $n=1$?

7.6.48. Montrer que dans la décomposition polaire $A=HU$ d'un opérateur A, l'opérateur non négatif H est bien défini.

7.6.49*. Soit $A=HU$ une décomposition polaire *arbitraire* d'un opérateur A. Montrer que l'opérateur U associe la base orthonormée des vecteurs propres de l'opérateur A^*A à une base analogue de l'opérateur AA^*.

7.6.50. Montrer que quelle que soit la décomposition polaire $A=HU$ d'un opérateur A, l'opérateur unitaire U associe le sous-espace T_{A^*} à T_A et le sous-espace N_A à N_{A^*}.

7.6.51*. Soit $A=HU$ la décomposition polaire d'un opérateur A. Démontrer que l'action de l'opérateur unitaire U dans le sous-espace T_{A^*} est bien définie par l'opérateur A.

7.6.52. Démontrer qu'un opérateur non dégénéré admet une seule décomposition polaire.

7.6.53. Démontrer que tout opérateur A qui agit dans un espace unitaire (euclidien) peut être mis sous la forme

$$A=U_1H_1,$$

où U_1 est un opérateur unitaire (orthogonal), et H_1 un opérateur non négatif. Montrer que dans cette représentation l'opérateur H_1 est bien défini.

7.6.54*. Démontrer qu'un opérateur A est normal si et seulement si dans sa décomposition polaire $A=HU$ les opérateurs H et U sont commutables.

7.6.55. Soient A un opérateur non dégénéré d'un espace unitaire et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres notés sous la forme trigonométrique

$$\lambda_1=\varrho_1 (\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \ldots, \quad \lambda_n=\varrho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n).$$

Prouver que les valeurs propres des opérateurs H et U de la décomposition polaire de A sont $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ et $\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_n+i\sin\varphi_n$ respectivement.

7.6.56. Un opérateur S est défini négatif. Trouver sa décomposition polaire.

7.6.57. Trouver la décomposition polaire d'un opérateur de dérivation dans l'espace des polynômes M_n à produit scalaire (7.1.7).

7.6.58. En connaissant la décomposition polaire $A=HU$ d'une matrice A trouver la décomposition polaire de son associée A_p.

7.6.59. On donne des matrices carrées A et B, il se peut, d'ordre distinct. Soient $A=HU$ et $B=KV$ leurs décompositions polaires. Trouver la décomposition polaire du produit kroneckerien $A\times B$.

Trouver les décompositions polaires des matrices suivantes :

7.6.60. $\begin{Vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{Vmatrix}$. **7.6.61.** $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -5i & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.62*. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.63*. En appliquant la décomposition polaire, démontrer la réciproque de 7.5.56 : si A est une matrice $n\times n$ de structure simple dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels, alors A peut être mise sous la forme $A=HS$, où H et S sont des matrices hermitiennes, et S est définie positive. Les facteurs H et S d'une matrice réelle A peuvent également être choisis réels.

7.6.64*. Démontrer que la somme des nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'une matrice A d'ordre $n\times n$ vérifie les représentations

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\max_W |\operatorname{tr}(AW)|=\max_W \operatorname{Re}\operatorname{tr}(AW),$$

où W parcourt l'ensemble tout entier des matrices unitaires d'ordre n.

§ 7.7. Décomposition hermitienne

Présentation des problèmes du paragraphe. L'objectif que nous nous proposons ici est de montrer que malgré sa simplicité la décomposition hermitienne est un outil très utile. C'est précisément la décomposition hermitienne qui permet dans de nombreux cas de ramener la résolution d'un problème posé pour des opérateurs arbitraires à la résolution des problèmes analogues relatifs aux opérateurs hermitiens, ce qui est bien plus simple dans les cas courants.

A la fin du paragraphe nous donnons un analogue de la décomposition hermitienne pour les opérateurs d'un espace euclidien (cf. problème 7.7.23).

7.7.1. Comment se transforme la décomposition hermitienne d'une matrice d'ordre n pour $n=1$?

7.7.2. Que peut-on dire d'un opérateur linéaire A si $(Ax, x)=0$ pour tout opérateur x?

7.7.3. Que peut-on dire des opérateurs linéaires A et B si pour tout vecteur x

a) $(Ax, x)=(Bx, x)$?

b) $(Ax, x)=(x, Bx)$?

7.7.4. Démontrer la réciproque de 7.4.22 : si pour un opérateur linéaire A le produit scalaire (Ax, x) est un nombre réel quel que soit le vecteur x, alors A est un opérateur hermitien.

7.7.5. Montrer que dans la définition d'un opérateur défini positif d'un espace unitaire, la restriction imposée à cet opérateur d'être hermitien est superflue.

7.7.6. Soient H et S des opérateurs hermitiens. Montrer que si H et S sont commutables, pour tout vecteur x le produit scalaire (Hx, Sx) est un nombre réel.

7.7.7. Que peut-on dire d'une matrice A d'ordre $n\times n$ si elle est orthogonale à toute matrice hermitienne au sens du produit scalaire (7.1.5)?

7.7.8. Supposons qu'une matrice A d'ordre $n\times n$ est telle que pour toute matrice hermitienne H la trace du produit AH est un nombre réel. Démontrer que dans ce cas A est une matrice hermitienne.

7.7.9. Soit $A=H_1+iH_2$ la décomposition hermitienne d'un opérateur A. Trouver la décomposition hermitienne de l'adjoint A^*.

7.7.10. Démontrer qu'un opérateur A est un opérateur normal si et seulement si les opérateurs H_1 et H_2 de sa décomposition hermitienne $A=H_1+iH_2$ sont commutables.

7.7.11. Montrer que pour un opérateur normal A les valeurs propres des opérateurs H_1 et H_2 de sa décomposition hermitienne coïncident avec les parties réelle et imaginaire respectivement des valeurs propres de A.

7.7.12. Montrer que toute base orthonormée des vecteurs propres d'un opérateur normal A est également une base des vecteurs propres des opérateurs H_1 et H_2 de sa décomposition hermitienne.

7.7.13. Soient A et B des opérateurs normaux commutables; $A=$ $=H_1+iH_2$; $B=S_1+iS_2$, leurs décompositions hermitiennes. Démontrer que les opérateurs H_1, H_2, S_1, S_2 sont tous des opérateurs commutables.

7.7.14. Soit A un opérateur d'un espace de dimension n à décomposition hermitienne $A=H_1+iH_2$. Démontrer que l'ensemble des valeurs de la relation

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

où x est un vecteur non nul arbitraire est compris dans le rectangle du plan complexe de sommets (α_1, β_1), (α_1, β_n), (α_n, β_n), (α_n, β_1). Ici α_1, α_n et β_1, β_n sont les valeurs propres maximale et minimale des matrices H_1 et H_2 respectivement.

7.7.15. Déduire de 7.7.14 le *théorème de Bendixon* suivant : les parties réelles (resp. imaginaires) des valeurs propres d'un opérateur A sont comprises entre les valeurs propres maximale et minimale de l'opérateur $H_1(H_2)$ de sa décomposition hermitienne.

7.7.16. Dans la décomposition hermitienne d'un opérateur A l'opérateur H_1 est défini positif. Démontrer que A est non dégénéré.

7.7.17*. Dans la décomposition hermitienne d'une matrice A, la matrice H_1 est définie négative. Démontrer que :

a) A est une matrice stable (cf. 7.5.20);

b) le produit de A par une matrice définie positive H quelconque est également une matrice stable.

7.7.18*. Dans une matrice tridiagonale complexe A les éléments diagonaux a_{ii} sont des nombres réels; les éléments hors diagonaux vérifient

les inégalités $a_{i,\,i+1}a_{i+1,\,i}<0$, $i=1, 2, \ldots, n-1$. Démontrer que les valeurs propres de A sont comprises dans la bande du plan complexe

$$\min_i a_{ii} \leq \operatorname{Re} z \leq \max_i a_{ii}.$$

7.7.19*. Une matrice carrée réelle s'appelle *matrice de tournoi* si tous ses éléments diagonaux a_{ii} sont nuls, alors que les éléments hors diagonaux satisfont à la condition $a_{ij}+a_{ji}=1$ quels que soient i, j, $i\neq j$. Démontrer que les valeurs propres d'une matrice de tournoi A considérée sur le corps des nombres complexes appartiennent à la bande du plan complexe

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}(n-1),$$

où n est l'ordre de A.

7.7.20*. Démontrer que dans l'énoncé du problème **7.7.16**

$$|\det A| \geq \det H_1.$$

Quand dans cette relation on obtient l'égalité?

7.7.21*. En appliquant le théorème de Schur, démontrer que l'énoncé du problème 7.7.16 donne lieu à la relation suivante entre les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des opérateurs A et H_1 respectivement :

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 \ldots \operatorname{Re} \lambda_n \geq \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

L'égalité s'obtient ici si et seulement si $\operatorname{Re} \lambda_i=\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, pour la mise en ordre convenable des valeurs propres.

7.7.22. Montrer que le nombre singulier maximal α_1 d'un opérateur A vérifie l'inégalité

$$\alpha_1 \leq \varrho(H_1)+\varrho(H_2).$$

Ici $\varrho(H_1)$ et $\varrho(H_2)$ sont les rayons spectraux des opérateurs H_1 et H_2 de la décomposition hermitienne.

7.7.23. Montrer que tout opérateur linéaire A d'un espace euclidien peut être mis sous la forme et sous une seule :

$$A=S+K,$$

où S est un opérateur symétrique, et K un opérateur antisymétrique.

7.7.24. Démontrer que l'espace $R_{n\times n}$ (cf. 7.1.17) est une somme orthogonale du sous-espace des matrices symétriques et du sous-espace des matrices antisymétriques.

7.7.25. Que peut-on dire d'un opérateur linéaire A d'un espace euclidien si $(Ax, x)=0$ pour tout vecteur x? Comparer le résultat au résultat de 7.7.2.

§ 7.8. Pseudo-solution et opérateur pseudo-inverse

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans la première partie du paragraphe nous traitons des propriétés des pseudo-solutions et de la pseudo-solution normale de l'équation $Ax=b$, où, dans le cas général, A est un opérateur de ω_{XY}, b un vecteur fixé de l'espace Y. Nous indiquons également certaines méthodes de calcul des pseudo-solutions

fondées sur la recherche préalable des bases orthonormées de vecteurs propres des opérateurs A^*A et AA^*. Rappelons à propos que les bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ s'appellent bases singulières de l'opérateur A (et de l'opérateur A^*) si les vecteurs $e_1, \ldots$ $\ldots, e_r$ et $f_1, \ldots, f_r$ qui correspondent aux valeurs propres non nulles $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$, sont liées par les relations

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} Ae_i, \quad i=1, \ldots, r.$$

Les bases singulières jouent le rôle principal dans la démonstration de diverses propriétés d'un opérateur pseudo-inverse que nous étudions dans la deuxième partie du paragraphe. Nous traitons cette question d'une façon plus large que l'imposent les objectifs didactiques immédiats, compte tenu que les cours d'algèbre linéaire passent pratiquement sous silence tout ce qui a trait à l'opérateur pseudo-inverse, alors que les ouvrages spéciaux donnent des interprétations les plus variées à première vue (bien que, certes, équivalentes) de cette notion. Nous donnons plusieurs définitions de ce genre et proposons de démontrer leur équivalence. Nous montrons également que la série des classes d'opérateurs qui agissent dans un espace unitaire (opérateurs normaux, hermitiens, non négatifs) est fermée par rapport à la pseudo-inversion.

7.8.1. Soit b_T la projection d'un vecteur b sur l'image T_A d'un opérateur A. Démontrer que toute pseudo-solution de l'équation $Ax=b$ est une image réciproque du vecteur b_T.

7.8.2. Montrer que l'ensemble des pseudo-solutions de l'équation $Ax=b$ est un plan dont le sous-espace directeur est le noyau N_A d'un opérateur A. Ce plan est un sous-espace si et seulement si b appartient au noyau N_{A^*} de l'adjoint A^*.

7.8.3. Montrer qu'une pseudo-solution normale de l'équation $Ax=b$ peut être définie comme une pseudo-solution de cette équation, orthogonale au noyau d'un opérateur A ou, ce qui revient au même, comme une pseudo-solution qui appartient à l'image de l'adjoint A^*.

7.8.4. Soient A un opérateur de l'espace des polynômes M_n muni de produit scalaire (7.1.7), $g(t)$ le polynôme donné de M_n. Trouver toutes les pseudo-solutions et la pseudo-solution normale de l'équation $Af=g$.

7.8.5. Comment sont liées entre elles les pseudo-solutions et les pseudo-solutions normales de l'équation $Ax=b$ et des équations a) $\alpha Ax=b$; b) $Ax=\alpha b$; c) $\alpha Ax=\alpha b$, où α est un nombre différent de zéro?

7.8.6. Comment sont liées entre elles les pseudo-solutions normales de l'équation $Ax=b$ et des équations a) $UAx=Ub$; b) $AVx=b$? Ici U et V sont des opérateurs unitaires.

7.8.7. Soit A un opérateur normal et supposons connue la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ composée de vecteurs propres de cet opérateur. Comment trouver les pseudo-solutions et la pseudo-solution normale de l'équation $Ax=b$?

7.8.8*. Soit A un opérateur de rang r d'un espace X de dimension n dans un espace Y de dimension m. On connaît la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ de vecteurs propres de l'opérateur A^*A et les valeurs propres correspondantes $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2 (\alpha_i > 0, i=1, \ldots, r)$. Démontrons que :

a) les pseudo-solutions de l'équation $Ax=b$ sont décrites par la formule

$$x=\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r + \gamma_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \gamma_n e_n,$$

où

$$\beta_i=\frac{(b, Ae_i)}{(Ae_i, Ae_i)}=\frac{(A^*b, e_i)}{\alpha_i^2}, \quad i=1, \ldots, r,$$

et $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ sont des nombres arbitraires;

b) la pseudo-solution normale est donnée par le vecteur

$$x_0=\beta_1 e_1+\ldots+\beta_r e_r.$$

7.8.9. Pour l'opérateur A du problème précédent on connaît la base orthonormée $f_1, \ldots, f_m$ de vecteurs propres de l'opérateur AA^* (en outre, $\alpha_i>0$, $i=1, \ldots, r$). Démontrer que la pseudo-solution normale de l'équation $Ax=b$ peut s'établir d'après la formule

$$x_0=\xi_1 A^*f_1+\ldots+\xi_r A^*f_r,$$

où

$$\xi_i=\frac{(b, f_i)}{\alpha_i^2} \quad i=1, \ldots, r.$$

Trouver la pseudo-solution normale des systèmes suivants d'équations linéaires en considérant que dans les espaces arithmétiques correspondants les produits scalaires sont introduits d'après (7.1.4) :

7.8.10*. $\begin{aligned} 279x_1+362x_2-408x_3&=0,\\ 515x_1-187x_2+734x_3&=0.\end{aligned}$

7.8.11. $\begin{aligned} 27x_1-55x_2&=1,\\ -13x_1+27x_2&=1,\\ -14x_1+28x_2&=1.\end{aligned}$

7.8.12. $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=2,\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=3,\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=4.\end{aligned}$

7.8.13. $\begin{aligned} x_1+x_2&=2,\\ x_1-x_2&=0,\\ 2x_1+x_2&=2.\end{aligned}$

7.8.14. $\begin{aligned} -x_1-2x_2&=1,\\ 2x_1+4x_2&=0,\\ x_1+2x_2&=0,\\ 3x_1+6x_2&=0.\end{aligned}$

7.8.15. $\begin{aligned} 2x_1-x_2 \qquad &=1,\\ -x_1+x_2+x_3 &=0,\\ x_2+2x_3&=1.\end{aligned}$

7.8.16. $\begin{aligned} 2x_1-\qquad x_2 \qquad &=1,\\ -x_1+(1+\varepsilon)x_2+x_3 &=0, \quad (\varepsilon\neq 0),\\ x_2+2x_3&=1.\end{aligned}$

7.8.17. $\begin{aligned} 2x_1-x_2 \qquad\qquad &=1,\\ -x_1+x_2+\qquad x_3&=0,\\ x_2+(2+\varepsilon)x_3&=1, \quad (\varepsilon\neq 0).\end{aligned}$

7.8.18*.
$$\begin{aligned} 5x_1-3x_4 \qquad &=2,\\ 4x_2+2x_3+2x_5&=3,\\ 2x_2+2x_3 \qquad &=0,\\ -3x_1+x_4 \qquad &=-2,\\ 2x_2+ \qquad 2x_5&=3. \end{aligned}$$

7.8.19. Trouver l'opérateur pseudo-inverse de l'opérateur nul de X dans Y.

7.8.20. Démontrer que pour un opérateur non dégénéré l'opérateur pseudo-inverse coïncide avec l'opérateur inverse.

7.8.21. Trouver l'opérateur pseudo-inverse de l'opérateur de dérivation dans l'espace des polynômes M_n muni de produit scalaire (7.1.7). Comparer l'opérateur obtenu avec l'opérateur adjoint (cf. 7.1.34).

7.8.22. Démontrer que pour tout opérateur A et le nombre α non nul

$$(\alpha A)^+=\frac{1}{\alpha}A^+.$$

7.8.23. Démontrer que quels que soient les opérateurs unitaires U et V,
a) $(UA)^+=A^+U^*$;
b) $(AV)^+=V^*A^+$.

7.8.24. Montrer que l'image et le noyau de l'opérateur pseudo-inverse A^+ coïncident respectivement avec l'image et le noyau de l'opérateur adjoint A^*.

7.8.25. Considérons un opérateur A comme un opérateur de T_{A^*} dans T_A, et l'opérateur pseudo-inverse A^+ comme un opérateur de T_A dans T_{A^*}. Montrer que sur ce couple de sous-espaces les opérateurs A et A^+ sont inverses réciproquement. Cela signifie que, quels que soient le vecteur x de T_{A^*} et le vecteur y de T_A,

$$A^+Ax=x, \quad AA^+y=y.$$

7.8.26. Montrer que les propriétés de l'opérateur pseudo-inverse indiquées dans 7.8.24 et 7.8.25 sous l'hypothèse supplémentaire de la linéarité sont équivalentes à la définition de l'opérateur pseudo-inverse.

7.8.27. Soient $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ les bases singulières d'un opérateur A. Trouver dans ce couple de bases la matrice de l'opérateur pseudo-inverse A^+.

7.8.28. Montrer que les bases singulières d'un opérateur A sont également les bases singulières de l'opérateur pseudo-inverse A^+. De plus, les nombres singuliers non nuls de A et de A^+ sont inverses réciproquement.

7.8.29. Montrer que $(A^+)^+=A$.

7.8.30. Montrer que $(A^*)^+=(A^+)^*$.

7.8.31. Montrer que l'opérateur pseudo-inverse d'un opérateur hermitien est encore hermitien.

7.8.32. Prouver que l'opérateur pseudo-inverse A^+ d'un opérateur normal A est encore normal. Trouver la relation entre les valeurs propres des opérateurs A et A^+.

7.8.33. Démontrer que, quel que soit k naturel, un opérateur normal A vérifie les relations $(A^k)^+=(A^+)^k$.

7.8.34. Démontrer que l'opérateur pseudo-inverse d'un opérateur non négatif est encore non négatif.

7.8.35. Soient $A=HU$ et $A=U_1H_1$ les décompositions polaires d'un opérateur A. Trouver les décompositions polaires de l'opérateur A^+.

7.8.36. Démontrer que pour qu'un opérateur A coïncide avec son pseudo-inverse il faut et il suffit que :

a) l'image T_A et le noyau N_A soient orthogonaux;

b) l'opérateur induit A/T_A vérifie l'égalité

$$(A/T_A)^{-1}=A/T_A.$$

En particulier, ces conditions sont observées pour un opérateur de projection orthogonale.

7.8.37*. Soient les opérateurs A et B tels que $A^*B=0$ et $BA^*=0$. Démontrer que $(A+B)^+=A^++B^+$.

7.8.38*. Les opérateurs A et B vérifient la relation $T_A=T_{B^*}$. Démontrer que $(BA)^+=A^+B^+$.

7.8.39. Démontrer l'égalité

$$AA^+A=A.$$

7.8.40. Démontrer que le sens géométrique de l'équation

$$AXA=A \tag{7.8.1}$$

par rapport à l'opérateur linéaire X consiste dans le fait que sur le couple de sous-espaces XT_A et T_A les opérateurs A et X doivent être réciproquement inverses au sens défini par 7.8.25.

7.8.41. Démontrer que l'opérateur pseudo-inverse A^+ peut être défini comme un opérateur linéaire vérifiant l'équation (7.8.1) et possédant la même image et le même noyau que l'adjoint A^*.

7.8.42*. Prouver que chacune des définitions ci-dessous est équivalente à la définition de l'opérateur pseudo-inverse :

a) un opérateur X vérifiant l'équation (7.8.1) et tel que

$$X=A^*B=CA^*$$

pour certains opérateurs linéaires B et C;

b) un opérateur X vérifiant l'équation (7.8.1) et tel que

$$X=A^*DA^*$$

pour un certain opérateur linéaire D;

c) un opérateur X vérifiant l'équation $A^*AX=A^*$ et tel que

$$X=A^*AF$$

pour un certain opérateur linéaire F.

7.8.43. Démontrer que le rang de l'opérateur $(A^+)^2$ est égal au rang de l'opérateur A^2.

7.8.44. Un opérateur A agit de l'espace X dans l'espace Y. Démontrer que l'opérateur A^+A est hermitien et qu'il consiste à réaliser la projection orthogonale de l'espace X sur le sous-espace T_{A^*}.

7.8.45. Décrire le sens géométrique des restrictions imposées à un opérateur X par le système d'équations

$$\begin{aligned} AXA &= A \\ (XA)^* &= XA. \end{aligned} \qquad (7.8.2)$$

7.8.46. Prouver l'égalité $A^+AA^+=A^+$.

7.8.47. L'opérateur X vérifie le système (7.8.2). Quelle est la nouvelle restriction que l'équation

$$XAX=X$$

impose à cet opérateur?

7.8.48. Prouver que pour l'opérateur A du problème 7.8.44 l'opérateur AA^+ est hermitien et qu'il consiste à réaliser la projection orthogonale de l'espace Y sur le sous-espace T_A.

7.8.49. Prouver que les conditions

$$AXA=A, \quad XAX=X,$$
$$(XA)^*=XA, \quad (AX^*)=AX$$

définissent univoquement l'opérateur pseudo-inverse. Ces conditions s'appellent *équations de Penrows* du nom du mathématicien anglais qui a été l'un des premiers à introduire l'opérateur pseudo-inverse (plus précisément, la matrice pseudo-inverse).

§ 7.9. Formes quadratiques

Présentation des problèmes du paragraphe. Voici les questions essentielles discutées dans ce qui suit :

Réduction de la forme quadratique à la forme canonique par transformation orthogonale des inconnues.

Loi d'inertie, congruence des matrices, détermination des indices d'inertie à l'aide des mineurs principaux.

Réduction simultanée d'un couple de formes quadratiques.

Méthode de Lagrange de réduction à la forme canonique envisagée seulement dans son application aux formes définies positives. Décomposition possible qui en découle d'une matrice définie positive en un produit de deux matrices triangulaires réciproquement transposées, qui est à la base d'une des méthodes les plus efficaces de résolution des systèmes d'équations linéaires à matrices de cette classe. Nous attachons une grande importance à cette méthode et à ses aspects numériques.

Notons que toutes les matrices examinées dans le présent paragraphe sont supposées réelles.

Pour chacune des matrices quadratiques ci-dessous trouver la transformation orthogonale des inconnues qui réduit cette forme à la forme canonique et noter la forme canonique obtenue :

7.9.1. $2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

7.9.2. $-3x_2^2+4x_1x_2+10x_1x_3-4x_2x_3$.

7.9.3. $-x_1^2+x_2^2-5x_3^2+6x_1x_3+4x_2x_3$.

7.9.4. $2x_1x_4+6x_2x_3$.

7.9.5. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_4^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+8x_2x_4+4x_3x_4$.

7.9.6*. Supposons qu'une forme quadratique peut être réduite par une transformation des inconnues, il se peut dégénérée, à la forme

$$F=y_1^2+\ldots+y_k^2-y_{k+1}^2-\ldots-y_{k+l}^2.$$

Démontrer que l'indice d'inertie positif de la forme F ne dépasse pas k, alors que l'indice d'inertie négatif ne dépasse pas l.

7.9.7. Prouver que pour décomposer une forme quadratique en un produit de deux formes linéaires il faut et il suffit que le rang de la forme ne dépasse pas deux, et que pour un rang égal à deux, la signature soit nulle.

7.9.8. Montrer que le rang et la signature d'une forme quadratique sont de même parité.

7.9.9. Des matrices réelles A et B d'ordre $n\times n$ sont dites *congruentes* s'il existe une matrice non dégénérée P telle que $B=P^TAP$. Montrer que la congruence sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre donné est réflexive, symétrique et transitive.

7.9.10. Démontrer qu'une matrice A est congruente à une matrice diagonale si et seulement si elle est symétrique.

7.9.11. Démontrer que des matrices symétriques A et B sont congruentes si et seulement si elles ont le même nombre de valeurs propres positives et le même nombre de valeurs propres négatives.

7.9.12*. En appliquant les propriétés des valeurs propres des matrices symétriques et de leurs sous-matrices principales (cf. 7.4.35) démontrer la proposition suivante : soit A la matrice d'une forme quadratique F à n inconnues, et supposons que tous les mineurs principaux directeurs de A soient différents de zéro. L'indice d'inertie positif (resp. négatif) de F est égal alors au nombre de coïncidences (changements) de signes de la suite numérique

$$1,\ D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n,$$

où D_i est le mineur principal directeur d'ordre i. Cette *règle* de définition des indices d'inertie est due à *Jacobi.*

7.9.13*. Soient dans les notations du problème 7.9.12 un mineur nul D_k, $k<n$, et des mineurs D_{k-1} et D_{k+1} différents de zéro. Démontrer que $D_{k-1}D_{k+1}<0$.

7.9.14*. Soit dans la suite $1,\ D_1,\ \ldots,\ D_n$ le déterminant $D\neq 0$, mais pour $k<n$, le mineur D_k peut être nul. Dans chacun de ces cas supposons que D_{k-1} et D_{k+1} sont différents de zéro. Attribuons d'une façon arbitraire des signes aux valeurs nulles de D_k. Montrer que dans ces conditions la règle de Jacobi de calcul des indices d'inertie garde sa validité. Ce supplément à la règle de Jacobi est dû à *Gundelfinger.*

7.9.15. Déduire les propositions de 7.4.44 et 7.4.45 de 7.9.12 et 7.9.14.

Calculer les indices d'inertie des formes quadratiques ci-dessous :

7.9.16. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4$.

7.9.17. $x_1x_2+2x_1x_3+3x_1x_4+x_2x_3+2x_2x_4+x_3x_4$.

7.9.18. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+$ $+4x_2x_4+6x_3x_4$.

7.9.19. Soit dans une forme quadratique $F(x_1, \ldots, x_n)$ le coefficient $a_{11}>0$. Quel est le résultat de la transformation suivante des inconnues

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n),$$
$$y_i=x_i, \quad i=2, \ldots, n.$$

7.9.20*. Démontrer qu'une forme quadratique définie positive peut être ramenée à une forme normale par une transformation *triangulaire* des inconnues, c'est-à-dire par une transformation de la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= s_{11}x_1+s_{12}x_2+\ldots+s_{1n}x_n, \\ y_2 &= \qquad\quad\; s_{22}x_2+\ldots+s_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad s_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

où $s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{nn}$ sont différents de zéro.

Réduire à la forme normale par une transformation triangulaire des inconnues les formes quadratiques suivantes :

7.9.21. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

7.9.22. $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

7.9.23. $x_1^2+4x_2^2+11x_3^2+24x_4^2-2x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3+16x_3x_4$.

7.9.24. Démontrer que pour toute matrice définie positive A il existe ce qu'on appelle une *décomposition triangulaire*, c'est-à-dire une représentation de la forme

$$A=S^TS, \tag{7.9.2}$$

où S est une matrice triangulaire supérieure.

7.9.25. Montrer que les éléments diagonaux de la matrice S de la décomposition triangulaire (7.9.2) et les mineurs principaux directeurs D_i de la matrice A sont liés par les relations

$$s_{ii}^2=\frac{D_i}{D_{i-1}}, \quad i=1, \ldots, n; \quad D_0=1.$$

Il en est de même pour les éléments diagonaux des formules (7.9.1).

7.9.26. Démontrer que la décomposition triangulaire (7.9.2) d'une matrice définie positive A est unique si l'on introduit la restriction supplémentaire que les éléments diagonaux s_{ii} soient positifs.

7.9.27. Montrer que les éléments de la matrice S de la décomposition (7.9.2) peuvent être calculés de proche en proche dans l'ordre $s_{11}, s_{12}, \ldots$ $\ldots, s_{1n}, s_{22}, s_{23}, \ldots, s_{nn}$ d'après les formules

$$s_{11}=\sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j}=\frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad j=2, \ldots, n,$$

$$s_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}s_{ki}^2}\quad (i>1), \tag{7.9.3}$$

$$s_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1}s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}}\quad (j>i).$$

En appliquant les formules (7.9.3) trouver la décomposition triangulaire des matrices suivantes :

7.9.28. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$. **7.9.29.** $\begin{Vmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$.

7.9.30. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{Vmatrix}$.

7.9.31. Une matrice définie positive A est d'une structure en bande, c'est-à-dire $a_{ij}=0$ pour $|i-j|>d>0$. En utilisant les formules (7.9.3), montrer que dans ce cas, $s_{ij}=0$ encore pour $j-i>d$.

7.9.32. Trouver la décomposition triangulaire de la matrice tridiagonale d'ordre n suivante :

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} & & & & \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & & & \\ & \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ & & & & \sqrt{2} & 3 \end{Vmatrix}.$$

7.9.33. Montrer que si la matrice S est la décomposition triangulaire d'une matrice A, sa sous-matrice principale S_k est la décomposition triangulaire de la sous-matrice A_k de la matrice A.

7.9.34. En utilisant les résultats du problème 7.9.30 trouver la décomposition triangulaire de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{Vmatrix}.$$

7.9.35. Démontrer que les éléments de la matrice S de la décomposition triangulaire (7.9.2) vérifient l'inégalité

$$\max_{i,j} |s_{ij}| \leq \max_i \sqrt{a_{ii}}.$$

En déduire que si pour la matrice A, $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| = 1$, alors $\max\limits_{i,j} |s_{ij}| \leq 1$.

Ainsi, le calcul de la décomposition triangulaire d'une matrice définie positive ne donne pas lieu à la croissance des éléments (au sens indiqué).

7.9.36. Trouver le nombre de multiplications, de divisions et d'extractions d'une racine carrée nécessaires pour calculer la matrice d'une décomposition triangulaire d'après les formules (7.9.3).

7.9.37. Supposons donnée la décomposition triangulaire d'une matrice définie positive A. Proposer une méthode de résolution du système d'équations linéaires $Ax=b$.

7.9.38. Trouver le nombre total de multiplications et de divisions nécessaires pour résoudre le système d'équations linéaires $Ax=b$ à matrice définie positive A à l'aide du calcul de la décomposition triangulaire de cette matrice d'après les formules (7.9.3) et la résolution ultérieure des systèmes d'équations linéaires à matrices triangulaires (cf. 7.9.37). Comparer ce nombre à celui de multiplications et de divisions nécessaires pour la réalisation de la méthode de Gauss.

Cette dernière méthode de résolution d'un système d'équations linéaires à matrice définie positive s'appelle *méthode de la racine carrée*.

7.9.39. Prouver qu'une matrice définie positive A peut être mise sous la forme du produit

$$A = S_1 S_1^T, \qquad (7.9.4)$$

où S_1 est une matrice triangulaire supérieure.

7.9.40. Soient A une matrice définie positive, $\tilde{A}$ la matrice symétrique à A par rapport à son centre, et $\tilde{A} = \tilde{S}^T \tilde{S}$ la décomposition triangulaire de $\tilde{A}$. Démontrer que la représentation (7.9.4) de A peut s'obtenir en cherchant la symétrie de chacune des matrices $\tilde{S}^T$ et $\tilde{S}$ par rapport à son centre.

7.9.41. Démontrer que deux formes quadratiques F et G de mêmes inconnues peuvent être réduites simultanément à la forme canonique par une transformation linéaire non dégénérée si au moins l'une des formes F ou G est définie positive.

7.9.42. On donne deux formes quadratiques F et G de mêmes inconnues, la forme G étant non dégénérée. Démontrer que s'il existe une transformation linéaire non dégénérée qui réduit les deux formes à la forme canonique

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$
$$G = \mu_1 y_1^2 + \ldots + \mu_n y_n^2,$$

alors, pour toute transformation de ce type, la collection des rapports

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}$$

est la même. Plus précisément, ces rapports sont des racines de ce qu'on appelle *z-équation du couple de formes* F et G : $|A-zB|=0$, où A et B sont les matrices des formes F et G respectivement.

7.9.43. Les formes quadratiques F et G sont définies positives. Considérons deux transformations linéaires non dégénérées. L'une d'elles réduit la forme F à la forme canonique $\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$, et la forme G à la forme normale; l'autre transformation réduit la forme F à la forme normale, et la forme G à la forme canonique $\mu_1 z_1^2+\ldots+\mu_n z_n^2$. Quelle est la relation entre les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$?

7.9.44. Prouver que les formes F et G peuvent être réduites simultanément à la forme canonique par une transformation linéaire non dégénérée si les matrices de ces formes sont commutables.

Pour chacun des couples des formes quadratiques ci-dessous trouver la transformation linéaire non dégénérée qui les réduit à la forme canonique. Indiquer les formes canoniques obtenues :

7.9.45. $F=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,$
$G=2x_1^2+8x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3.$

7.9.46. $F=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3,$
$G=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-10x_1x_3+4x_2x_3.$

7.9.47. $F=x_1^2-5x_2^2-14x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3,$
$G=-x_1^2-14x_2^2-4x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$

7.9.48. $F=x_1^2+3x_2^2+x_3^2-x_4^2-2x_1x_2-4x_2x_3+2x_3x_4,$
$G=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_4.$

7.9.49. $F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+$
$+2x_2x_3+4x_2x_4+2x_3x_4,$
$G=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-$
$-2x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4.$

7.9.50. Soient F et G des formes quadratiques de mêmes inconnues $x_1, \ldots, x_n$, de plus, G est définie positive. Numérotons les racines de z-équation du couple de formes F et G dans l'ordre décroissant : $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \ldots \geq z_n$. Démontrer que la racine maximale z_1 et la racine minimale z_n vérifient les représentations

$$z_1 = \max_{x_1^2+\ldots+x_n^2\neq 0} \frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)},$$

$$z_n = \min_{x_1^2+\ldots+x_n^2\neq 0} \frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}.$$

7.9.51. Formuler et démontrer l'analogue du théorème de Courant-Fischer pour le couple de formes du problème précédent.

CHAPITRE 8

PROBLÈMES MÉTRIQUES DANS UN ESPACE VECTORIEL

§ 8.0. Terminologie et généralités

Un ensemble X s'appelle *espace métrique* si à chaque couple de ses éléments x et y on fait correspondre un nombre non négatif $\varrho(x, y)$ appelé *distance entre x et y*; de plus, on respecte les axiomes suivants :

1. $\varrho(x, y)=0$ si et seulement si $x=y$;
2. $\varrho(x, y)=\varrho(y, x)$;
3. $\varrho(x, z)\leq\varrho(x, y)+\varrho(y, z)$.

Soit M_1 un sous-ensemble d'un espace métrique X. L'ensemble des éléments $x\in X$ n'appartenant pas à M_1 est dit *complémentaire* de M_1. Si M_1, M_2, ... sont des sous-ensembles de X, on appelle *réunion* l'ensemble des éléments dont chacun appartient au moins à l'un des ensembles $M_1, M_2, \ldots$. On appelle *intersection* de M_1, M_2, ... l'ensemble des éléments qui font partie de chacun des ensembles M_1, M_2, ...

On appelle *boule* $S(a, r)$ l'ensemble des éléments x de X qui vérifient la condition

$$\varrho(a, x)<r.$$

L'élément a s'appelle *centre* de boule, le nombre positif r, *rayon* de boule.

On appelle *voisinage* de l'élément x toute boule de centre x. Dans un espace métrique X l'ensemble M est dit *ouvert* si avec chacun de ses éléments x il contient un certain voisinage de cet élément.

Un élément $x\in X$ s'appelle *point limite* d'un ensemble M si tout voisinage de cet élément contient au moins un élément de M qui ne coïncide pas avec x. L'ensemble obtenu par l'adjonction à M de tous les points limites s'appelle *fermeture* de M notée $\bar{M}$. L'ensemble M est dit *fermé* si $M=\bar{M}$.

On appelle *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $\bar{S}(a, r)$ des éléments x de X qui vérifient la condition

$$\varrho(x, a)\leq r.$$

L'élément x_0 d'un espace métrique X s'appelle *limite d'une suite* $\{x_n\}$ d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de X si $\varrho(x_0, x_n)\to 0$ pour $n\to\infty$. Dans ce cas on écrit

$$x_n\to x$$

ou bien

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

La suite $\{x_n\}$ admettant une limite est dite *convergente* (vers x_0).

Une suite $\{x_n\}$ d'éléments d'un espace métrique est dite *fondamentale* si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un indice $N(\varepsilon)$ tel que $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Si dans un espace métrique X toute suite fondamentale converge vers une certaine limite, l'espace X est dit *complet*.

Un espace vectoriel X réel ou complexe s'appelle *espace* vectoriel *normé* si à chaque vecteur $x \in X$ on associe un nombre réel $\|x\|$ appelé *norme* du vecteur x tout en vérifiant les axiomes suivants :

1. $\|x\| \geq 0$, de plus, $\|x\| = 0$ seulement si $x = 0$;
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. (8.0.1)

Si l'on pose

$$\varrho(x, y) = \|x-y\|,$$

un espace normé peut être considéré comme un espace métrique. La convergence de la suite par rapport à une telle distance s'appelle *convergence en norme*.

Un ensemble M d'un espace vectoriel normé X est dit *borné* s'il existe un nombre positif C tel que $\|x\| \leq C$ pour tout x de M.

On appelle *boule unité* d'un espace normé X l'ensemble des vecteurs x tels que $\|x\| \leq 1$ ($\|x\| = 1$).

Dans un espace normé l'ensemble M est dit *convexe* si avec deux de ses vecteurs quelconques x et y il contient le segment $\lambda x + (1-\lambda) y$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tout entier.

Tout espace vectoriel normé de X de dimension finie est un espace métrique complet. Le fait que l'ensemble M de X est borné est équivalent au fait que dans toute base de l'espace X les coordonnées de tous les vecteurs x de M sont bornées. De même, la convergence de la suite $\{x_k\}$ vers le vecteur x_0 est équivalente au fait que dans toute base de l'espace X les coordonnées des vecteurs x_k convergent vers les coordonnées correspondantes du vecteur x_0.

Un exemple d'espace normé est donné par un espace arithmétique de dimension n dans lequel la norme du vecteur $x = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)^T$ est définie par l'égalité

$$\|x\|_p = (|\alpha_1|^p + |\alpha_2|^p + \ldots + |\alpha_n|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1. \tag{8.0.2}$$

L'inégalité triangulaire de cette norme s'appelle *inégalité de Minkowski*. Cette dernière se déduit de *l'inégalité de Hölder*:

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8.0.3}$$

Soient X et Y des espaces normés aux normes $\|x\|_X$ et $\|y\|_Y$ respectivement. On dit que dans l'espace des opérateurs ω_{XY} la norme $\|A\|$ est *concordante* avec les normes vectorielles des espaces X et Y, si

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \, \|x\|_X \tag{8.0.4}$$

pour tout $x \in X$ et tout opérateur $A \in \omega_{XY}$.

Si X est un espace normé à norme $\|x\|$, dans l'espace ω_{XX}, la norme définie par l'égalité

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{8.0.5}$$

est dite *subordonnée* à la norme vectorielle $\|x\|$. Outre les axiomes usuels, la norme subordonnée jouit encore d'une propriété spéciale par rapport à la multiplication des opérateurs :

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|. \tag{8.0.6}$$

Les définitions des normes concordante et subordonnée s'étendent immédiatement sur les espaces des matrices considérées comme des opérateurs dans des espaces arithmétiques. Si, en particulier, on introduit dans un espace arithmétique la norme $\|x\|_p$ [cf. (8.0.2)], la norme subordonnée correspondante est notée $\|A\|_p$. Il est question le plus souvent des normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.

Même dans le cas où la norme des matrices considérée n'est pas subordonnée, nous supposerons qu'elle observe la propriété (8.0.6).

Supposons qu'une matrice A soit de la forme $A = E + B$, où $\|B\| < 1$ pour une certaine norme matricielle. Dans ce cas A est non dégénérée et pour la norme de l'inverse on vérifie l'estimation

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}. \tag{8.0.7}$$

Supposons qu'on examine le système d'équations

$$Ax = b$$

à matrice carrée non dégénérée A et le système *perturbé*

$$(A + \varepsilon_A)\tilde{x} = b + \varepsilon_b.$$

On suppose par rapport à la matrice ε_A que

$$\|\varepsilon_A\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Cette condition assure la non-dégénérescence de la matrice $A + \varepsilon_A$. Si l'on pose

$$\delta x = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad \delta A = \frac{\|\varepsilon_A\|}{\|A\|}, \quad \delta b = \frac{\|\varepsilon_b\|}{\|b\|},$$

on a l'estimation

$$\delta x \leq \frac{\|A\| \, \|A^{-1}\|}{1 - \|A\| \, \|A^{-1}\| \, \delta A} (\delta A + \delta b). \tag{8.0.8}$$

On suppose ici que la norme des matrices $\|A\|$ est subordonnée à la norme vectorielle $\|x\|$.

Le produit $\|A\| \, \|A^{-1}\|$ s'appelle *nombre de conditionnement* ou *conditionnement* tout court de la matrice A et on le note cond (A). S'il faut expliciter une norme matricielle par rapport à laquelle on choisit le conditionnement, on écrit $\text{cond}_1(A)$, $\text{cond}_2(A)$ ou $\text{cond}_\infty(A)$.

Comme le montre l'estimation (8.0.8), le conditionnement caractérise la sensibilité de la solution du système d'équations linéaires $Ax=b$ aux perturbations de ses coefficients. Il est d'usage de dire *mal conditionnées* pour les matrices à conditionnement important.

Soient A une matrice d'ordre $n\times n$ de structure simple à valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, X la matrice non dégénérée dont les colonnes sont des vecteurs propres de la matrice A. Toutes les valeurs propres de la matrice $A+\varepsilon_A$ sont comprises alors dans le domaine du plan complexe qui est une réunion de n disques

$$|z-\lambda_i| \leq \text{cond}\,(X)\|\varepsilon_A\|, \quad i=1, \ldots, n. \tag{8.0.9}$$

Ici par norme de matrices on entend l'une des normes $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.

§ 8.1. Espace vectoriel normé

Présentation des problèmes du paragraphe. Outre les exercices sur les notions métriques essentielles, nous examinons dans ce paragraphe deux questions encore : l'équivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie et la relation de dualité des normes par rapport au produit scalaire. Les faits relatifs aux normes duales nous permettront d'introduire dans le paragraphe suivant la relation d'ordre partiel sur l'ensemble des normes d'opérateurs.

8.1.1. Montrer que dans un espace euclidien (unitaire) la longueur d'un vecteur vérifie les axiomes d'une norme.

8.1.2. Dans un espace X de dimension n on a fixé une base $e_1, \ldots, e_n$. Soit x un vecteur arbitraire de X à décomposition suivant la base

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n.$$

Montrer que dans X une norme peut être définie par l'égalité :

a) $\|x\|_1=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$;
b) $\|x\|_2=(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\ldots+|\alpha_n|^2)^{1/2}$;
c) $\|x\|_\infty=\max\limits_i |\alpha|$;
d) en général, pour tout nombre positif p, $p>1$,

$$\|x\|_p=(|\alpha_1|^p+|\alpha_2|^p+\ldots+|\alpha_n|^p)^{1/p}.$$

8.1.3. Soient $m(x)$ et $n(x)$ deux normes d'un espace vectoriel X. Montrer que les normes de cet espace sont également

a) $p(x)=\max\,(m(x), n(x))$;

b) $q(x)=\alpha m(x)+\beta n(x)$, où α et β sont les nombres non négatifs fixés non simultanément nuls;

c) $r(x)=(m^2(x)+n^2(x))^{1/2}$.

8.1.4. Soit P un opérateur linéaire non dégénéré de l'espace vectoriel normé X à norme $\|x\|$. Démontrer que $m(x)$ où

$$m(x)=\|Px\|, \tag{8.1.1}$$

est également une norme de X.

8.1.5. Un espace vectoriel X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. De plus, on introduit sur L_1 la norme $m(x)$, sur L_2 la norme $n(x)$. Soit x un vecteur arbitraire de X; en outre, $x=x_1+x_2$, où $x_1 \in L_1$; $x_2 \in L_2$. Adoptons

$$\|x\|=m(x_1)+n(x_2).$$

Montrer que par ce procédé on introduit la norme sur l'espace X.

8.1.6. Rejetons dans la définition de la norme la restriction imposant à une norme d'être nulle seulement pour le vecteur nul. La fonction de vecteur ainsi obtenue est dite *semi-norme*. De la sorte, la semi-norme $\|x\|$ est définie par les axiomes :

a) $\|x\| \geq 0$;

b) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

c) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Démontrer que si on introduit dans un espace vectoriel X la semi-norme $\|x\|$, il vient :

a) l'ensemble des vecteurs tels que la semi-norme soit nulle est un sous-espace vectoriel L de l'espace X;

b) tous les vecteurs du plan x_0+L ont la même semi-norme;

c) en associant à chaque plan x_0+L la valeur générale de la semi-norme de ses vecteurs, on obtient la norme sur l'espace quotient de l'espace X par le sous-espace L.

8.1.7. Démontrer que pour n'importe quels quatre vecteurs x, y, z, u d'un espace normé on vérifie l'inégalité

$$|\,\|x-y\|-\|z-u\|\,| \leq \|x-z\|+\|y-u\|.$$

8.1.8. Démontrer que la boule $\|x-x_0\|<r$ est un ensemble ouvert.

8.1.9. Démontrer que la réunion d'un nombre quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

8.1.10. Montrer que toute boule est un ensemble borné.

8.1.11. Montrer que tout plan de dimension positive n'est pas un ensemble borné.

8.1.12. Montrer que toute boule est un ensemble convexe.

8.1.13. Montrer que tout plan de dimension positive est un ensemble convexe.

8.1.14. Prouver que la boule $\|x-x_0\| \leq r$ est un ensemble fermé.

8.1.15. Démontrer qu'un complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé.

8.1.16. Démontrer qu'un complémentaire d'un ensemble fermé est un ensemble ouvert.

8.1.17. Montrer que l'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

8.1.18. Montrer que la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé. Donner un exemple qui montre que la réunion d'un nombre infini d'ensembles fermés peut déjà ne plus être un ensemble fermé.

8.1.19. Démontrer que si $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$, on a :

a) $\|x_k\| \to \|x_0\|$;

b) $\|x_k - a\| \to \|x_0 + a\|$ pour tout vecteur a;

c) $\alpha x_k + \beta y_k \to \alpha x_0 + \beta y_0$ pour tous les nombres α et β;

d) si la suite des nombres λ_k converge vers le nombre λ_0, alors $\lambda_k x_k \to \lambda_0 x_0$.

8.1.20. Prouver que si toute sous-suite non triviale d'une suite $\{x_k\}$ converge, alors la suite $\{x_k\}$ est encore convergente. On dit triviale pour une sous-suite qui coïncide à partir d'un certain terme avec la suite initiale.

8.1.21. Démontrer que si x_0 est le point limite d'un ensemble M, il existe une suite $\{x_k\}$, $x_k \in M$, convergente vers x_0.

8.1.22. Démontrer que la fermeture d'un ensemble convexe est encore un ensemble convexe.

8.1.23. Démontrer que de toute suite bornée de vecteurs d'un espace normé on peut extraire une sous-suite convergente.

8.1.24. Démontrer que tout ensemble infini borné possède des points limites.

8.1.25. On appelle *distance du vecteur x à l'ensemble M* la grandeur

$$\varrho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Montrer que si M est un ensemble fermé, il existe un $y_0 \in M$ tel que $\varrho(x, M) = \|x - y_0\|$.

8.1.26. On appelle *distance entre les ensembles* M_1 et M_2 la grandeur

$$\varrho(M_1, M_2) = \inf \|x - y\|.$$

$$x \in M_1, \quad y \in M_2.$$

Démontrer que si les ensembles M_1 et M_2 sont fermés et bornés, il existe des $x_0 \in M_1$ et $y_0 \in M_2$ tels que $\varrho(M_1, M_2) = \|x_0 - y_0\|$.

8.1.27. Montrer que le résultat du problème 8.1.26 se conserve si on supprime la restriction imposant à l'un des ensembles M_1 et M_2 d'être borné. Donner un exemple qui montre que la proposition du problème est invalidée si les deux ensembles M_1 et M_2 ne sont pas bornés.

8.1.28. Les vecteurs x_0 et y_0 sont-ils bien définis dans les formulations des problèmes 8.1.25, 8.1.26 et 8.1.27?

8.1.29*. Soit M un ensemble convexe d'un espace euclidien (unitaire) et supposons qu'on adopte comme norme la longueur d'un vecteur. Démontrer que dans la formulation du problème 8.1.25, le vecteur y_0 est dans ce cas bien défini.

8.1.30. Soient M_1 et M_2 des ensembles fermés bornés. Démontrer que l'ensemble N des vecteurs de la forme $x+y$, où $x \in M_1$, $y \in M_2$, est fermé et borné.

8.1.31. Les ensembles M_1 et M_2 sont fermés; de plus, M_1 est borné. Démontrer que dans ce cas-là aussi la proposition du problème 8.1.30 sur la fermeture de l'ensemble N est vraie. Donner un exemple qui montre que pour des ensembles fermés non bornés M_1 et M_2, l'ensemble N peut ne pas être fermé.

8.1.32*. Soit X un espace vectoriel réel ou complexe. L'application de X sur l'ensemble des nombres réels ou complexes respectivement s'appelle *fonctionnelle* sur X. Soit X un espace normé. Une fonctionnelle $F(x)$ est dite *continue au point* x_0, si $x_k \to x_0$ implique $F(x_k) \to F(x_0)$. Une fonctionnelle $F(x)$ est *continue sur l'ensemble* M si elle est continue pour tout x_0 de M. Une fonctionnelle continue pour tout x de X est dite *continue*.

Démontrer que :

a) toute fonctionnelle linéaire sur un espace X est continue;

b) si $\|x\|$ est une norme introduite sur un espace X, toute autre norme $m(x)$ de X est une fonctionnelle continue par rapport à $\|x\|$.

8.1.33*. Soient M un ensemble fermé borné et $F(x)$ une fonctionnelle continue sur M. Démontrer qu'il existe un nombre positif c tel que $|F(x)| \leq c$ pour tout x de M.

8.1.34*. Démontrer que dans l'énoncé du problème précédent il existe dans M un vecteur x_0 tel que $|F(x_0)| = \max_{x \in M} |F(x)|$.

8.1.35*. Prouver que pour deux nombres quelconques $m(x)$ et $n(x)$ d'un espace vectoriel X, il existe des nombres positifs c_1 et c_2 tels que

$$c_1 n(x) \leq m(x) \leq c_2 n(x). \qquad (8.1.2)$$

Comment choisir le plus grand des nombres possibles c_1 et le plus petit des nombres possibles c_2?

8.1.36. Dans les inégalités (8.1.2) trouver les meilleurs nombres possibles c_1 et c_2 de chaque couple des trois normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ (cf. 8.1.2).

8.1.37*. Dans un espace arithmétique de dimension n on considère les normes

$$\|x\|_2 = (|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2)^{1/2}$$

et

$$m(x) = \|Px\|_2,$$

où P est une matrice d'ordre $n \times n$ non dégénérée. Comment calculer pour ce couple de normes les meilleures constantes possibles c_1 et c_2 des inégalités (8.1.2)?

8.1.38. Démontrer que l'ensemble M appartenant à un espace X et ouvert par rapport à la norme $m(x)$ de cet espace est encore ouvert par rapport à tout autre norme.

8.1.39. Démontrer qu'un ensemble M fermé par rapport à une norme quelconque d'un espace X est encore fermé par rapport à toute autre norme de cet espace.

8.1.40. Démontrer que tout plan d'un espace normé X est un ensemble fermé et non pas un ensemble ouvert (sauf l'espace X lui-même).

8.1.41*. Un espace X est somme directe des sous-espaces L_1 et L_2. L'ensemble fermé M_1 appartient à L_1, et l'ensemble fermé M_2 à L_2. Démontrer que l'ensemble N des sommes $x+y$, où $x \in M_1$, $y \in M_2$, est fermé. Constater qu'à la différence de 8.1.31 ici on n'impose la restriction d'être borné à aucun des ensembles M_1 ou M_2.

8.1.42. Dans un espace euclidien (unitaire) X, outre la longueur du vecteur, on examine encore la norme $m(x)$. Adoptons pour tout y de X

$$m^*(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|}{m(x)}. \tag{8.1.3}$$

Montrer que cette expression est toujours finie et $m^*(y)$ satisfait à tous les axiomes de la norme. La norme obtenue $m^*(y)$ est dite *duale de la norme* $m(x)$ par rapport au produit scalaire (x, y).

8.1.43. Montrer que la détermination d'une norme duale est équivalente à chacune des expressions suivantes:

a) $m^*(y) = \sup\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$; b) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{|(x, y)|}{m(x)}$;

c) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$; d) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\operatorname{Re}(x, y)}{m(x)}$;

e) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} \operatorname{Re}(y, x)$.

8.1.44. Montrer que dans l'énoncé du problème 8.1.42, quels que soient les deux vecteurs x et y, ils vérifient l'inégalité

$$|(x, y)| \leq m(x) m^*(y). \tag{8.1.4}$$

En outre, pour tout y il existe un vecteur x_0 tel que

$$(x_0, y) = m(x_0) m^*(y).$$

8.1.45. Trouver la norme duale de la longueur d'un vecteur.

8.1.46. Trouver la duale de la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_i |\alpha_i|$ dans un espace arithmétique de dimension n muni de produit scalaire (7.1.4).

8.1.47*. Démontrer en généralisant 8.1.46 que la duale de la norme

$$\|x\|_p = (|\alpha_1|^p + \ldots + |\alpha_n|^p)^{1/p}, \quad p > 1,$$

est la norme

$$\|x\|_q = (|\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'inégalité (8.1.4) que représente-t-elle pour ce couple de normes?

8.1.48. Quel que soit le vecteur x, les normes $m(x)$ et $n(x)$ d'un espace euclidien (unitaire) X vérifient l'inégalité $m(x) \geq n(x)$. Montrer que quel que

soit le vecteur y, les normes duales $m^*(y)$ et $n^*(y)$ donnent lieu à la relation inverse : $m^*(y) \leq n^*(y)$.

8.1.49*. Démontrer que pour tout vecteur x, il existe un vecteur y tel que l'inégalité (8.1.4) devient égalité.

8.1.50. Montrer que la norme $m^{**}(x)$, duale de la norme duale $m^*(y)$, coïncide avec la norme initiale $m(x)$.

§ 8.2. Normes d'opérateurs et de matrices

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans le présent paragraphe nous examinons presque exclusivement les norme dans l'espace des matrices en vue des applications indiquées dans les paragraphes qui suivent. Bien entendu, toutes les propositions peuvent être formulées dans le langage des opérateurs. Soulignons que nous disons matricielle pour une norme qui en plus des trois axiomes usuels possède encore la propriété suivante associée à la multiplication des matrices :

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Nous étudions les différentes classes des normes matricielles et, en particulier, les propriétés d'une norme spectrale et euclidienne. Dans ce dernier cas nous donnons plusieurs relations métriques intéressantes analogues à celles qui ont lieu dans un plan complexe. A titre de conclusion, nous analysons les propriétés des normes subordonnées et la propriété de concordance entre les normes vectorielle et matricielle. Cette analyse conduit à la relation d'ordre partiel sur l'ensemble des normes.

8.2.1. Démontrer que tout opérateur linéaire associe un ensemble borné à un ensemble borné.

8.2.2. Est-il vrai qu'un ensemble ouvert est associé par un opérateur linéaire encore à un ensemble ouvert?

8.2.3. Est-il vrai qu'une transformation linéaire associe un ensemble fermé à un ensemble fermé?

8.2.4. Démontrer qu'un opérateur linéaire arbitraire associe un ensemble fermé et borné à un ensemble fermé.

8.2.5*. Soient M un ensemble fermé, A un opérateur linéaire. Démontrer que l'*image réciproque de M* (c'est-à-dire l'ensemble de x tels que $Ax \in M$) est encore un ensemble fermé.

8.2.6*. Soit $\{A_k\}$ une suite d'opérateurs linéaires d'un espace normé X, et supposons que pour tout x de X, la suite $\{A_k x\}$ converge. Posons

$$Ax = \lim_{k \to \infty} A_k x.$$

Montrer que

a) l'opérateur A défini par cette égalité est linéaire;

b) $A_k \to A$ quelle que soit la norme sur l'espace des opérateurs.

8.2.7. Montrer que la suite des matrices $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ converge (quelle que soit la norme) vers la matrice $A = (a_{ij})$ si et seulement si $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ pour tous les i, j.

8.2.8. Montrer qu'une suite de matrices normales ne peut avoir pour limite qu'une matrice normale. D'une façon analogue, une suite de matrices unitaires ne peut converger que vers une matrice unitaire; une suite de

matrices hermitiennes vers une matrice hermitienne; une suite de matrices définies positives vers une matrice définie positive.

8.2.9. Montrer que quelle que soit la norme sur un espace des matrices, la norme de la matrice unité n'est pas inférieure à un.

8.2.10. Soit $\|A\|$ la norme sur l'espace des matrices d'ordre $n\times n$. Montrer que

a) $M(A)=\alpha\,\|A\|, \quad \alpha>1$;

b) $L(A)=\|A^*\|$;

c) $N(A)=\|P^{-1}AP\|$, où P est une matrice non dégénérée d'ordre n, sont encore des normes matricielles.

8.2.11. Montrer que si $M(A)$ et $L(A)$ sont des normes matricielles, $N(A)=\max\{M(A), L(A)\}$ est encore une norme matricielle.

8.2.12. Démontrer que la fonction suivante d'une matrice $n\times n$:

$$K(A)=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|, \tag{8.2.1}$$

est une norme matricielle.

8.2.13. Soit E_{ij} une matrice d'ordre n dont l'unique élément non nul égal à un est (i, j). Montrer que si pour tous les i, j, la norme matricielle $\|A\|$ vérifie l'inégalité

$$\|E_{ij}\|\leq 1,$$

on a

$$\|A\|\leq K(A),$$

où $K(A)$ est la norme définie par la formule (8.2.1).

8.2.14. Dans un espace arithmétique de dimension n on introduit le produit scalaire naturel (7.1.4). Dans un tel espace, la norme des matrices subordonnée à la longueur d'un vecteur s'appelle *norme spectrale* notée $\|A\|_2$. Démontrer que la norme spectrale d'une matrice est égale à son nombre singulier maximal.

8.2.15. Comment calculer la norme spectrale a) d'une matrice diagonale; b) d'une matrice quasi diagonale?

8.2.16. Introduisons dans un espace des matrices d'ordre $n\times n$ un produit scalaire d'après (7.1.5). La longueur d'une matrice dans un espace euclidien (unitaire) obtenu est définie par la formule

$$\|A\|_E=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

qu'on appelle *norme euclidienne d'une matrice*. Montrer que pour des matrices A et B quelconques

$$\|A\,B\|_E\leq\|A\|_E\,\|B\|_E.$$

8.2.17. Trouver la norme euclidienne d'une matrice unitaire d'ordre n.

8.2.18*. Déduire l'expression de la norme euclidienne d'une matrice A d'ordre $n\times n$ à travers ses nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

8.2.19. Démontrer que la norme spectrale d'une matrice A est égale à sa norme euclidienne si et seulement si A est de rang 1.

8.2.20. Démontrer que pour les matrices U et V quelconques

$$\|UAV\|_2=\|A\|_2, \quad \|UAV\|_E=\|A\|_E.$$

8.2.21*. Démontrer les inégalités :

a) $\|A\|_E\leq\sqrt{n}\,\|A\|_2$;

b) $\|AB\|_E\leq\|A\|_2\,\|B\|_E$;

c) $\|AB\|_E\leq\|A\|_E\,\|B\|_2$.

8.2.22. Soit la décomposition hermitienne $A=H_1+iH_2$ d'une matrice A. Démontrer que

a) $\|H_1\|_2\leq\|A\|_2, \quad \|H_2\|_2\leq\|A\|_2$;

b) $\|H_1\|_E^2+\|H_2\|_E^2=\|A\|_E^2$.

8.2.23. Démontrer que pour toute matrice hermitienne H

$$\|A-H\|_E\geq\|A-H_1\|_E.$$

Ainsi, la matrice H_1 de la décomposition hermitienne de A est la matrice hermitienne la plus proche de A (au sens de la distance euclidienne). D'une façon analogue, la matrice iH_2 est la matrice antihermitienne la plus proche de A. Indiquer l'analogue de cette propriété dans le plan complexe.

8.2.24. Soit $A=HU$, la décomposition polaire d'une matrice A. Montrer que

$$\|H\|_E^2=\|H_1\|_E^2+\|H_2\|_E^2.$$

Quelle est la propriété des nombres complexes à laquelle correspond cette égalité?

8.2.25*. Démontrer que pour toute matrice définie positive H la matrice unitaire la plus proche au sens de la distance euclidienne est la matrice unité E, la plus éloignée la matrice $-E$. Que changera-t-il si H est une matrice non négative?

8.2.26. Soit $A=HU$ une décomposition polaire arbitraire d'une matrice A. Démontrer que toute matrice unitaire V vérifie les inégalités

$$\|A-U\|_E\leq\|A-V\|_E\leq\|A+U\|_E.$$

Indiquer la propriété correspondante des nombres complexes.

8.2.27*. Soit A une matrice d'ordre $n\times n$ aux nombres singuliers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Adoptons

$$S(A)=\alpha_1+\ldots+\alpha_n. \tag{8.2.2}$$

Démontrer que $S(A)$ est une norme matricielle.

8.2.28. Démontrer que quels que soient les matrices A et B et les nombres non négatifs α et β

$$S(\alpha A+\beta B)=\alpha S(A)+\beta S(B).$$

La norme $S(A)$ est définie par l'égalité (8.2.2).

8.2.29*. Montrer que dans la définition d'une norme subordonnée

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

l'abréviation sup peut être remplacée par max.

8.2.30. Trouver les normes subordonnées des matrices des normes suivantes d'un espace arithmétique de dimension n :

a) $\|x\|_1=|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_n|$;

b) $\|x\|_\infty=\max|\alpha_i|$.

Trouver les valeurs des normes obtenues sur la matrice diagonale D.

8.2.31. Démontrer que toute matrice A d'ordre $n\times n$ vérifie l'égalité

$$\max_{i,j}|a_{ij}|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1}.$$

8.2.32. Les normes $m(x)$ et $n(x)$ d'un espace arithmétique sont telles que pour tout vecteur x $m(x)=c\,n(x)$, où c est un nombre fixé. Montrer que les normes subordonnées correspondantes coïncident.

8.2.33. Soit $M(A)$ la norme des matrices subordonnées à la norme vectorielle $m(x)$. Trouver la norme matricielle subordonnée à la norme $n(x)=m(Px)$, où P est une matrice fixée non dégénérée.

8.2.34. Soit A une matrice de rang 1 mise sous la forme de produit $A=xy^*$, où x et y sont des vecteurs colonnes de dimension n. Démontrer l'égalité qui suit pour toute norme $m(x)$ d'un espace arithmétique et toute norme subordonnée correspondante des matrices $M(A)$:

$$M(A)=m(x)m^*(y), \tag{8.2.3}$$

où $m^*(y)$ est la norme duale de $m(x)$ par rapport au produit scalaire (7.1.4).

8.2.35. Trouver la valeur de la norme $\|A\|_\infty$ sur la matrice de rang 1 à représentation connue $A=xy^*$.

8.2.36. Soit $M(A)$ une norme matricielle subordonnée. Démontrer que $M(A)$ vérifie la représentation :

$$M(A)=\max_{B\neq 0}\frac{M(AB)}{M(B)}. \tag{8.2.4}$$

8.2.37. Démontrer que la représentation (8.2.4) reste en vigueur encore dans le cas où l'on considère non pas toutes les matrices non nulles B, mais seulement les matrices de rang 1.

8.2.38*. Démontrer qu'une norme matricielle subordonnée $M(A)$ vérifie également la représentation

$$M(A)=\max_{r_B=1}\frac{|tr(AB)|}{M(B)}. \tag{8.2.5}$$

Ici B parcourt l'ensemble des matrices de rang 1.

8.2.39. Soient $M(A)$ et $N(A)$ des normes matricielles subordonnées et supposons que $M(A) \geq N(A)$ pour tout A. Démontrer que dans ce cas $M(A) \equiv N(A)$.

8.2.40*. Soient $m(x)$ et $m^*(x)$ des normes duales d'un espace arithmétique, $M(A)$ et $M^*(A)$ les normes matricielles qui leur sont subordonnées. Démontrer que pour toute matrice A

$$M(A) = M^*(A^*).$$

8.2.41*. Démontrer que toute norme des matrices concorde avec une certaine norme d'un espace arithmétique.

8.2.42. Montrer que si une norme matricielle $\|A\|$ concorde avec une norme vectorielle $m(x)$ et si $M(A)$ est subordonnée à $m(x)$, on a $\|A\| \geq M(A)$ pour toute matrice A. Ainsi, la norme subordonnée $M(A)$ est la plus petite de toutes les normes qui concordent avec la norme vectorielle $m(x)$.

8.2.43*. Démontrer que toute norme subordonnée des matrices concorde avec la norme vectorielle unique (à multiplication par un nombre près).

8.2.44. Montrer que toute norme subordonnée $M(A)$ est *minimale* au sens qu'il n'existe pas d'autre norme matricielle $L(A)$ telle que

$$L(A) \leq M(A)$$

pour toute matrice A.

8.2.45*. Supposons que la norme matricielle $\|A\|$ concorde avec la norme vectorielle $m(x)$ telle que $M(A)$ soit une norme subordonnée. De plus, $\|A\|$ coïncide avec $M(A)$ sur l'ensemble des matrices de rang 1. Prouver que $m(x)$ est l'unique norme vectorielle (à multiplication par un nombre près) avec laquelle concorde $\|A\|$.

8.2.46. Montrer qu'une norme euclidienne des matrices, ainsi qu'une norme $S(A)$ [cf. (8.2.2)] concordent seulement (à multiplication par un nombre près) avec la norme $\|x_2\| = (|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2)^{1/2}$.

8.2.47. Sur la matrice unité E, une norme matricielle $M(A)$ est égale à un. Est-ce que ceci signifie que $M(A)$ est une norme subordonnée?

§ 8.3. Normes matricielles et systèmes d'équations linéaires

Présentation des problèmes du paragraphe. Nous discutons ci-dessous des applications des normes matricielles à la résolution des systèmes d'équations linéaires définis (les systèmes non définis et incompatibles ont été examinés au § 7.8). Ici les questions essentielles sont :

Critère de non-dégénérescence des matrices.

Estimations des normes des matrices inverses.

Conditionnement des systèmes d'équations linéaires, propriétés des nombres de conditionnement.

Estimation de la perturbation de la solution d'un système, la perturbation de ses coefficients étant donnée.

La résolution approchée d'un système avec estimation de la précision de la solution obtenue.

8.3.1. Démontrer qu'une matrice $A+B$, où A est une matrice non dégénérée et $\|A^{-1}B\| < 1$, est encore une matrice non dégénérée.

8.3.2. Démontrer que si une matrice A est non dégénérée et la matrice $A+B$ est dégénérée, le nombre de conditionnement de A donne lieu à l'estimation

$$\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|B\|}.$$

8.3.3. Evaluer inférieurement le nombre de conditionnement $\operatorname{cond}_\infty(A)$ de la matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{matrix} \right\|, \quad \varepsilon \neq 0.$$

8.3.4. Démontrer qu'une matrice $U+B$, où U est une matrice unitaire et où la norme spectrale de la matrice B est inférieure à l'unité, est non dégénérée.

8.3.5*. Soit α_n le nombre singulier minimal d'une matrice A d'ordre $n \times n$. Démontrer que la distance (au sens d'une norme spectrale) de A à l'ensemble M des matrices dégénérées est

$$\varrho_2(A, M) = \alpha_n.$$

8.3.6*. Démontrer que le nombre singulier minimal de la matrice du déterminant (3.3.1) ne dépasse pas $2^{-(n-1)}$.

8.3.7*. Les nombres singuliers d'une matrice A d'ordre n sont $\alpha_1 \geq \ldots$ $\ldots \geq \alpha_n$. Démontrer que la distance (au sens d'une norme spectrale) de A à l'ensemble M_r des matrices de rang inférieur à r est

$$\varrho_2(A, M_r) = \alpha_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

8.3.8. Une matrice A d'ordre n est dite *diagonalement dominante (suivant les lignes)* si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Démontrer qu'une matrice diagonalement dominante est non dégénérée. Enoncer le critère analogue de la domination suivant les colonnes.

8.3.9*. Soit A la matrice divisée en blocs de la forme

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2k} \\ \ldots & \ldots \\ A_{k1} & A_{k2} \ldots A_{kk} \end{matrix} \right\|,$$

où tous les blocs A_{ij} sont carrés et sont de même ordre m; les blocs diagonaux A_{ii} sont non dégénérés. De plus, tout i, $1 \leq i \leq k$, vérifie les inégalités

$$\|A_{ii}^{-1}\| \left(\|A_{i1}\| + \ldots + \|A_{i,\,i-1}\| + \|A_{i,\,i+1}\| + \ldots + \|A_{ik}\| \right) < 1.$$

Démontrer que A est non dégénérée. Formuler la proposition qui s'obtient si $m=1$.

8.3.10. La matrice

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 1 & 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}4 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

est-elle non dégénérée?

8.3.11*. Soit A une matrice diagonalement dominante d'ordre n; de plus, pour un certain nombre positif α inférieur à l'unité

$$\alpha|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$$

Démontrer que la norme de l'inverse A^{-1} vérifie les estimations

$$\frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}|}\cdot\frac{1}{1+\alpha} \leq \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}|}\cdot\frac{1}{1-\alpha}. \tag{8.3.1}$$

8.3.12. A l'aide des éléments diagonaux de la matrice A et du nombre α de l'énoncé du problème 8.3.11, évaluer inférieurement et supérieurement le nombre de conditionnement $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

8.3.13. Evaluer inférieurement et supérieurement le nombre de conditionnement $\operatorname{cond}_\infty(A)$ de la matrice d'ordre $n\times n$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 10^{-1} & 10^{-2} & \ldots & 10^{-(n-1)} \\ 10^{-1} & 2 & 10^{-2} & \ldots & 10^{-(n-1)} \\ 10^{-2} & 10^{-2} & 3 & \ldots & 10^{-(n-1)} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 10^{-(n-1)} & 10^{-(n-1)} & 10^{-(n-1)} & \ldots & n \end{Vmatrix}.$$

8.3.14. Soit R une matrice triangulaire d'ordre n telle que

a) $|r_{ij}| \leq 1$ pour tous les i, j;

b) $r_{ii}=1$ pour tout i.

Trouver la valeur maximale du nombre de conditionnement $\operatorname{cond}_\infty(R)$.

8.3.15. Supposons donnée la suite de matrices A_k d'ordre fixé n; de plus, $\|A_k\|=1$ et $\operatorname{cond}(A_k)\to\infty$ pour $k\to\infty$. Démontrer que $\det A_k\to 0$ pour $k\to\infty$.

Ainsi, l'ordre d'une matrice étant fixé, l'augmentation du nombre de conditionnement est associée à la diminution de la grandeur du déterminant. Pourtant, comme le montre 8.3.14, n étant suffisamment grand, le nombre de conditionnement d'une matrice peut être très grand même si le déterminant vaut 1.

8.3.16. Montrer que le nombre de conditionnement de toute matrice est borné inférieurement par 1.

8.3.17. Montrer que la multiplication d'une matrice A par un nombre non nul ne change pas le nombre de conditionnement cond (A).

8.3.18. Trouver l'expression du nombre de conditionnement spectral d'une matrice normale non dégénérée A par les valeurs propres $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$.

8.3.19. Trouver l'expression du nombre de conditionnement spectral d'une matrice d'ordre $n\times n$ non dégénérée A par ses nombres singuliers $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.

8.3.20. Démontrer que l'égalité $\text{cond}_2(A)=1$ a lieu si et seulement si $A=\alpha U$, où U est une matrice unitaire et α un nombre non nul.

8.3.21. Montrer que la permutation des lignes et des colonnes d'une matrice A ne change pas les nombres de conditionnement $\text{cond}_{1,2,\infty,E}(A)$.

8.3.22. Montrer que la prémultiplication et la postmultiplication d'une matrice A par des matrices U et V unitaires arbitraires ne changent pas les nombres de conditionnement spectral et euclidien.

8.3.23. Démontrer les inégalités

$$\max\left\{\frac{\text{cond}(A)}{\text{cond}(B)}, \frac{\text{cond}(B)}{\text{cond}(A)}\right\} \leq \text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\,\text{cond}(B).$$

8.3.24. Donner une expression explicite du nombre de conditionnement euclidien $\text{cond}_E(A)$ d'une matrice non dégénérée A d'ordre 2×2 par ses éléments.

8.3.25. Montrer que parmi toutes les matrices 2×2 non dégénérées dont les éléments sont des entiers non négatifs ne dépassant pas 100, la matrice

$$\begin{Vmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{Vmatrix}$$

admet le nombre de conditionnement euclidien maximal.

8.3.26. A la résolution de deux équations linéaires à deux inconnues

$$a_{11}x + a_{12}y = a_1, \quad a_{21}x + a_{22}y = a_2,$$

dont la matrice A est réelle et non dégénérée, correspond le problème géométrique de la recherche du point d'intersection de deux droites données par les équations du système. Démontrer que l'angle α de ces droites vérifie l'inégalité

$$|\text{ctg}\,\alpha| \leq \frac{1}{2}\,\text{cond}_E(A).$$

8.3.27. Soit A une matrice définie positive. Démontrer que le nombre de conditionnement spectral de la matrice $A+\alpha E$ est une fonction monotonement décroissante de α pour $\alpha>0$.

8.3.28. Soient A une matrice définie positive, A_k une sous-matrice principale arbitraire de A. Démontrer que

$$\text{cond}_2(A_k) \leq \text{cond}_2(A).$$

8.3.29. Soit $A=S^TS$ la décomposition triangulaire d'une matrice A définie positive réelle. Comment sont associés les nombres de conditionnement spectraux des matrices A et S?

8.3.30. Evaluer inférieurement le nombre de conditionnement spectral de la matrice du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 10\ x_1+10\ x_2+30\ x_3&=-5,\\ 0{,}1\ x_1+0{,}5\ x_2+0{,}1\ x_3&=0{,}55,\\ 0{,}03x_1+0{,}01x_2+0{,}01x_3&=0{,}045. \end{aligned}$$

Indiquer le moyen de diminuer le nombre de conditionnement de façon que dans le système obtenu $\hat{A}x=\hat{b}$ on ait $\operatorname{cond}_2(\hat{A})=3$. Résoudre ce système.

8.3.31*. Evaluer inférieurement le nombre de conditionnement spectral de la matrice du système

$$\begin{aligned} x_1+20\ x_2-400x_3&=1,\\ 0{,}2\ x_1-2\ x_2-20x_3&=0{,}2\\ -0{,}04x_1-0{,}2x_2+x_3&=0{,}05. \end{aligned}$$

Indiquer le moyen de diminuer le nombre de conditionnement de façon que dans le système obtenu $\hat{A}y=\hat{b}$ on ait $\operatorname{cond}_2(\hat{A})=2$. Résoudre ce système.

8.3.32. Soient $\|x\|$ une norme sur un espace arithmétique, $\|A\|$ la norme des matrices qui lui est subordonnée. Montrer que si l'on change le second membre du système d'équations linéaires $Ax=b$ pour un vecteur muni de norme égale au nombre $\varepsilon>0$, la solution du système peut changer d'un vecteur muni de norme $\varepsilon\,\|A^{-1}\|$.

8.3.33. Evaluer la perturbation éventuelle de la solution du système

$$\begin{aligned} x\ -2y&=-1,\\ -2x+4{,}01y&=2 \end{aligned}$$

si l'on change de 0,01 les composantes du second membre. Trouver la solution du système donné et du système de même matrice, mais de second membre

$$\tilde{b}=\left\|\begin{matrix}-1\\ 2{,}01\end{matrix}\right\|.$$

8.3.34. Trouver le nombre de conditionnement $\operatorname{cond}_\infty(A)$ de la matrice du système

$$\begin{aligned} 5x-3{,}31y&=1{,}69,\\ 6x-3{,}97y&=2{,}03. \end{aligned}$$

Indiquer comment change la solution de ce système si l'on passe à un système de même matrice, mais de second membre

$$\tilde{b}=\left\|\begin{matrix}1{,}7\\ 2\end{matrix}\right\|.$$

8.3.35. Trouver la solution approchée du système

$$\begin{aligned} 2{,}503x_1+0{,}002x_2-0{,}004x_3+0{,}001x_4&=5,\\ 0{,}006x_1-3{,}002x_2+0{,}001x_3-0{,}001x_4&=3,\\ -0{,}002x_1+0{,}002x_2+4{,}998x_3+0{,}004x_4&=10,\\ 0{,}005x_1-0{,}001x_2\qquad\qquad+3{,}997x_4&=4, \end{aligned}$$

de façon que l'erreur de chaque composante ne dépasse pas 0,01.

8.3.36. Trouver la solution approchée du système

$$\begin{aligned} 0{,}501x_1-0{,}499x_2+0{,}001x_3\qquad\qquad&=0{,}5,\\ 0{,}498x_1+0{,}502x_2\qquad\qquad-0{,}001x_4&=0{,}5,\\ 0{,}006x_1+0{,}007x_2+3{,}008x_3-1{,}991x_4&=0,\\ -0{,}001x_1\qquad\qquad-2{,}001x_3+1{,}000x_4&=0, \end{aligned}$$

de façon que l'erreur de chaque composante ne dépasse pas 0,06.

8.3.37. Démontrer l'inégalité

$$\frac{\|B^{-1}-A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|}\leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|B-A\|}{\|A\|}.$$

§ 8.4. Normes matricielles et valeurs propres

Présentation des problèmes du paragraphe. Dans ce paragraphe nous voulons présenter quelques-unes des nombreuses applications des normes matricielles aux problèmes relatifs aux valeurs propres des matrices complexes.

Nous examinons d'abord certaines inégalités entre les valeurs propres et les normes de matrices. Ces inégalités peuvent être utilisées pour indiquer le domaine du plan complexe qui contient toutes les valeurs propres de la matrice. Dans ce but on peut appliquer aussi le théorème de Gerschgorin (cf. 8.4.20), ainsi que le théorème de perturbation des valeurs propres (cf. § 8.0).

En utilisant les propriétés des valeurs propres des matrices hermitiennes on parvient dans ce cas à modifier le théorème de perturbation de façon à obtenir une estimation de chaque valeur propre prise à part (cf. problèmes 8.4.25-8.4.32).

Si l'on donne une approximation de valeur propre λ_1 bien séparée et le vecteur propre $\tilde{x}$ approché correspondant de la matrice normale, le quotient de Rayleigh composé pour le vecteur $\tilde{x}$ donne une bien meilleure approximation de λ_1. Cette question est examinée dans les problèmes 8.4.33-8.4.39.

A titre de conclusion nous étudions la relation entre l'existence des valeurs propres d'une matrice et une matrice de vecteurs propres mal conditionnée. On montre sans peine que dans un faible voisinage d'une matrice possédant des valeurs propres proches ou multiples, il existe une matrice à structure de Jordan. Cette dernière peut être considérée comme un cas limite d'une matrice aux vecteurs propres mal conditionnés. Comme l'a noté Wilkinson, la réciproque a également lieu : si pour la matrice A (même à valeurs propres bien séparées) la matrice de vecteurs propres est mal conditionnée, il existe dans un faible voisinage de A une matrice à racine multiple.

8.4.1*. Démontrer que le rayon spectral d'une matrice A vérifie l'inégalité

$$\varrho(A)\leq\|A\|, \qquad (8.4.1)$$

quelle que soit la norme matricielle $\|A\|$.

8.4.2. Indiquer le disque sur le plan complexe qui contient toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1+2i \\ 0 & 2 & 1+i \\ 1+2i & 1+i & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.4.3. Démontrer que toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

appartiennent au disque du plan complexe $|z| \leq 6$.

8.4.4. Démontrer que la valeur propre maximale λ_1 et la valeur propre minimale λ_4 de la matrice symétrique

$$\begin{Vmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 20 \end{Vmatrix}$$

vérifient les inégalités

$$20 \leq \lambda_1 \leq 23, \quad 0 < \lambda_4 \leq 6.$$

8.4.5. Démontrer que toutes les valeurs propres d'une matrice stochastique ne dépassent pas l'unité en module.

8.4.6. Démontrer que les valeurs propres de la matrice tridiagonale

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 & b_2 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_3 & & & \\ & c_3 & a_3 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & a_{n-1} & b_n \\ & & & & c_n & a_n \end{Vmatrix}$$

vérifient l'inégalité

$$|\lambda| \leq \max_i \{|a_i| + |b_{i+1}| + |c_i|\}, \quad c_1 = b_{n+1} = 0.$$

Comment utiliser ce résultat pour calculer les valeurs propres d'une matrice hermitienne par la méthode de bissection?

8.4.7. Démontrer que toutes les racines du polynôme $f(z)=a_nz^n+ +a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$, $a_n\neq 0$, sont contenues dans chacun des disques suivants du plan complexe :

$$\text{a) } |z|\leq \max\left\{1, \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|+\ldots+\left|\frac{a_1}{a_n}\right|+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right\};$$

$$\text{b) } |z|\leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1+\max_{1\leq i\leq n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right\}.$$

8.4.8*. Soit A_0 une matrice de structure simple. Démontrer qu'il existe une norme matricielle $\|A\|$ telle que pour $A=A_0$ la relation (8.4.1) devient égalité.

8.4.9*. Soit A_0 une matrice arbitraire. Démontrer que pour tout nombre positif ε il existe une norme matricielle $\|A\|$ telle que $\|A_0\|<\varrho(A_0)+\varepsilon$.

8.4.10. Démontrer que pour une matrice normale A_0, $\|A_0\|_2\leq M(A_0)$ pour toute norme matricielle $M(A)$.

8.4.11. Démontrer que pour une matrice arbitraire A_0 et toute norme matricielle $M(A)$, $\|A_0\|_2\leq \sqrt{M(A_0)M(A_0^*)}$.

8.4.12*. Soit A une matrice d'ordre n à valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Démontrer l'*inégalité de Schur* suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq \|A\|_E^2. \tag{8.4.2}$$

8.4.13*. Soient dans l'énoncé du problème 8.4.12, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_n$ les parties réelles et imaginaires des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prouver que

$$\text{a) } 4\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\leq \|A+A^*\|_E^2; \quad \text{b) } 4\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\leq \|A-A^*\|_E^2. \tag{8.4.3}$$

8.4.14*. Démontrer que (8.4.2) devient égalité si et seulement si A est une matrice normale. Ceci est vrai encore pour chacune des relations (8.4.3).

8.4.15*. Soient A une matrice $n\times n$ à valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; P une matrice non dégénérée arbitraire. Démontrer que

$$\inf_P \|P^{-1}AP\|_E^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.$$

Pour quelles matrices A on atteint la limite inférieure indiquée?

8.4.16*. En appliquant 8.4.14 démontrer que la normalité des matrices A, B et AB implique la normalité de BA.

8.4.17*. Supposons que la matrice normale A soit partitionnée en blocs A_{ij} tels que

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}\end{matrix}\right\|.$$

De plus, les blocs diagonaux A_{ii} sont carrés et, il se peut, d'ordre distinct. Supposons ensuite que les valeurs propres de A coïncident avec l'ensemble des valeurs propres des matrices A_{ii}. Démontrer que dans ce cas tous les blocs hors diagonaux A_{ij} sont nuls.

8.4.18*. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, les nombres singuliers d'une matrice A. Démontrer que

$$|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_n|\leq\alpha_1+\ldots+\alpha_n.$$

8.4.19*. En appliquant 8.4.18 prouver que pour toute matrice A d'ordre n,

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\leq\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

8.4.20*. Démontrer le *théorème de Gerschgorin* suivant : toutes les valeurs propres d'une matrice A d'ordre $n\times n$ appartiennent au domaine du plan complexe qui est une réunion de n disques

$$|z-a_{ii}|\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\ldots,n.$$

8.4.21. Indiquer le domaine du plan complexe qui contient toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix}1,23 & 0,03 & 0,04\\ 0,03 & 2,17 & 0,01\\ 0,02 & 0,04 & 3,06\end{Vmatrix}.$$

8.4.22. La matrice A vérifie les inégalités

$$\operatorname{Re} a_{ii}<-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\ldots,n.$$

Démontrer que A est une matrice stable.

8.4.23. En appliquant le théorème des perturbations des valeurs propres, indiquer le domaine du plan complexe contenant toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix}2,001 & 1,499 & 0,001\\ 0,499 & 1,001 & -0,001\\ -0,001 & 0,001 & 0,999\end{Vmatrix}.$$

8.4.24. Soient

$$A=\begin{Vmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{Vmatrix}.$$

Trouver le domaine du plan complexe qui contient toutes les valeurs propres de la matrice $A+\varepsilon B$. Utiliser à cet effet le théorème des perturbations des valeurs propres.

8.4.25*. Soient A et B des matrices hermitiennes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Démontrer que chaque intervalle

$$-\|B\|_2 \leq x-\lambda_i \leq \|B\|_2, \quad i=1, \ldots, n, \tag{8.4.4}$$

contient au moins une valeur propre de la matrice $A+B$.

8.4.26. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs propres des matrices A et B respectivement, où

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 2{,}1 & 2{,}9 & -2 \\ 2{,}9 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ -2 & 0{,}1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Démontrer que pour tout λ_i il existe un μ_j tel que $|\lambda_i-\mu_j| \leq 0{,}3$.

8.4.27*. Trouver pour la matrice

$$\begin{Vmatrix} 2\cdot10^{-4} & -3 & 4 & 9991 \\ -3\cdot10^{-8} & 1\cdot10^{-4} & -0{,}4993 & -6\cdot10^{-4} \\ 4\cdot10^{-8} & -0{,}4993 & 2\cdot10^{-4} & -2\cdot10^{-4} \\ 0{,}9991\cdot10^{-4} & -6\cdot10^{-4} & -2\cdot10^{-4} & 1\cdot10^{-4} \end{Vmatrix}$$

les valeurs propres approchées, de façon que l'erreur de chacune d'entre elles ne dépasse pas 0,002.

8.4.28. Soit dans l'énoncé du problème 8.4.25 λ_i la valeur propre de multiplicité k. Démontrer que dans ce cas l'intervalle

$$-\|B\|_2 \leq x-\lambda_i \leq \|B\|_2$$

contient au moins k valeurs propres de la matrice $A+B$.

8.4.29*. Trouver les approximations des valeurs propres de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1{,}01 & -1{,}99 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ -1{,}99 & 1{,}01 & -0{,}01 & -0{,}01 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & -0{,}01 & -0{,}99 \\ 0{,}01 & -0{,}01 & -0{,}99 & -0{,}01 \end{Vmatrix}$$

de façon que l'erreur de chaque valeur propre ne dépasse pas 0,02.

8.4.30. Soit dans l'énoncé du problème 8.4.25 le domaine D constitué d'intervalles (8.4.4) se décompose en domaines (c'est-à-dire intervalles) n'admettant aucun point commun. Démontrer que chacun de ces domaines D_k contient autant de valeurs propres de la matrice $A+B$ qu'il (le domaine) compte d'intervalles du système (8.4.4). En outre, si λ_i est une valeur propre multiple de A, l'intervalle qui lui correspond est pris autant de fois que la multiplicité de λ_i l'indique.

8.4.31. La matrice hermitienne A est divisée en blocs

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

de façon que A_{11} et A_{22} soient des blocs carrés, et $\|A_{12}\|_2=\varepsilon$. Soient λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A numérotées dans l'ordre décroissant; $\xi_1, \ldots, \xi_r$, les valeurs propres de A_{11}; $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ les valeurs propres de A_{22}, et, enfin, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les nombres de l'ensemble $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots$ $\ldots, \eta_{n-r}$ numérotés également dans l'ordre décroissant. Démontrer que $|\lambda_i-\mu_i|\leq\varepsilon$, $i=1, \ldots, n$.

Ainsi, les valeurs propres des blocs diagonaux peuvent être considérées comme des approximations à ε près des valeurs propres de la matrice A elle-même.

8.4.32*. Prouver que la matrice suivante A d'ordre 8

$$\begin{Vmatrix}
1 & 1/N & 0 & & & & & 1/N \\
1/N & 1 & 2/N & & & & & \\
0 & 2/N & 1 & & & & & \\
 & & & 2 & 1/N & & & \\
 & & & 1/N & 2 & & & \\
 & & & & & -0{,}5 & 0{,}1 & -0{,}2 \\
 & & & & & 0{,}1 & -1 & 0 \\
1/N & & & & & -0{,}2 & 0 & 2
\end{Vmatrix}$$

(à éléments des cases (1,8) et (8,1) près; A est une matrice quasi diagonale) :

a) admet, quel que soit $N>0$, au moins une valeur propre dans l'intervalle

$$-\frac{\sqrt{2}}{N}\leq\lambda-1\leq\frac{\sqrt{2}}{N};$$

b) admet, pour $N\geq 10$, *exactement* trois valeurs propres dans l'intervalle

$$-\frac{3}{N}\leq\lambda-1\leq\frac{3}{N}.$$

Dans les problèmes 8.4.33-8.4.35 on suppose que A est une matrice normale, $\tilde{x}$ un vecteur colonne normé tel que $\|\tilde{x}\|_2=1$.

8.4.33. Soit $\|A\tilde{x}\|_2=\varepsilon$. Démontrer que la matrice A possède une valeur propre λ telle que $|\lambda|\leq\varepsilon$.

8.4.34. Pour un nombre arbitraire μ posons $\varepsilon=\|A\tilde{x}-\mu\tilde{x}\|_2$. Montrer que le disque du plan complexe $|z-\mu|\leq\varepsilon$ contient au moins une valeur propre de la matrice A.

8.4.35*. Soit λ_1 une valeur propre d'une matrice A, contenue dans le disque $|z-\mu_0|\leq\varepsilon$ (pour ε, cf. 8.4.34) et supposons que toutes les autres valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vérifient la condition

$$|\lambda_i-\mu_0|\geq a\gg\varepsilon.$$

Désignons par e_1 le vecteur propre normé associé à la valeur propre λ_1 et soit

$$\tilde{x}=\alpha e_1+z, \tag{8.4.5}$$

où $z\perp e_1$. Démontrer que

a) $\|Az-\mu_0 z\|_2\geq a\|z\|_2$;

b) $\|Az-\mu_0 z\|_2\leq \varepsilon$, $\|z\|_2\leq \varepsilon/a$;

c) $|\alpha|\geq\sqrt{1-\varepsilon^2/a^2}$;

d) $|(Az, z)-\mu_0\|z\|_2^2\leq \varepsilon^2/a$.

Ainsi, si ε est suffisamment petit par rapport à a, $\tilde{x}$ peut être considéré comme une approximation de e_1.

8.4.36. Soient A une matrice d'ordre n, x un vecteur colonne non nul arbitraire de dimension n. Le nombre

$$r(x)=\frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

s'appelle *quotient de Rayleigh* associé au vecteur x. Démontrer que tout nombre μ vérifie l'inégalité

$$\|Ax-r(x)x\|_2\leq\|Ax-\mu x\|_2.$$

8.4.37. Démontrer que pour une matrice normale A et tout vecteur normé $\tilde{x}$ le disque

$$|z-r(\tilde{x})|\leq(\|A\tilde{x}\|_2^2-|r(\tilde{x})|^2)^{1/2}$$

contient une valeur propre de la matrice A.

8.4.38*. Supposons que dans l'énoncé du problème 8.4.35 μ_0 est le quotient de Rayleigh associé au vecteur $\tilde{x}$. Démontrer que ce cas donne lieu à l'estimation :

$$|\lambda_1-\mu_0|\leq\frac{\varepsilon^2}{a}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)^{-1}. \tag{8.4.6}$$

8.4.39. Pour la matrice symétrique A

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}002\\ 0{,}001 & 2 & 0{,}002 & 0{,}002\\ 0{,}002 & 0{,}002 & 3 & 0{,}001\\ 0{,}002 & 0{,}002 & 0{,}001 & 4\end{matrix}\right\|$$

a) trouver les valeurs propres à 0,005 près en utilisant 8.4.25;

b) montrer que tous les éléments diagonaux de A peuvent être considérés comme des quotients de Rayleigh, en indiquant les vecteurs qui leur sont associés;

c) démontrer que les éléments diagonaux sont des approximations des valeurs propres respectives à 10^{-5} près.

8.4.40. Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice A sont distinctes et que $d=\min\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|$. Prouver qu'il existe

une matrice B telle que $\|B\|_2 \leq d/2$ et que la matrice $A+B$ admet une valeur propre multiple.

8.4.41*. Démontrer que dans l'énoncé du problème 8.4.40 pour tout nombre $\varepsilon>0$ il existe une matrice C_ε telle que $\|C_\varepsilon\|_2 < \frac{d}{2}+\varepsilon$ et que $A+C_\varepsilon$ ne soit pas une matrice de structure simple.

8.4.42*. Toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice A sont distinctes. Soient x_i le vecteur propre de A associé à λ_i; y_i le vecteur propre de A^* associé à $\bar{\lambda}_i$. Posons

$$s_i = \frac{(x_i, y_i)}{\|x_i\|_2 \|y_i\|_2}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Pour x_i et y_i réels, le nombre s_i est le cosinus de l'angle de ces deux vecteurs. Il est évident que $|s_i|$ ne dépend pas du choix d'un couple concret de vecteurs x_i, y_i (pour λ_i donné).

Démontrer que :

a) pour toute matrice X composée de vecteurs propres de A

$$\operatorname{cond}_2(X) \geq \frac{1}{|s_i|}, \quad i=1, \ldots, n;$$

b) la matrice X peut être choisie de façon que

$$\operatorname{cond}_2(X) \leq \operatorname{cond}_E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|s_i|}.$$

Ainsi, de même que son nombre de conditionnement, la valeur des nombres $|s_i|$ peut servir de mesure du conditionnement d'une matrice des vecteurs propres.

8.4.43. Soit C la matrice triangulaire

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

et supposons que la première composante β_1 d'un certain vecteur propre y de l'adjointe C^* associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_1$ est nulle. Démontrer que λ_1 est une valeur propre multiple de C.

8.4.44. Les matrices A et A^* possèdent des vecteurs propres x et y associés à λ_1 et $\bar{\lambda}_1$ respectivement; de plus, $(x, y)=0$. Démontrer que λ_1 est une valeur propre multiple de A.

8.4.45*. Mettons la matrice C de l'énoncé du problème 8.4.43 sous la forme partitionnée :

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & c \\ 0 & C_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Considérons que le vecteur propre y de la matrice C^* associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_1$ est normé, et au lieu de $\beta_1=0$ imposons que $\beta_1=\varepsilon$, $|\varepsilon|<1$. Mettons le vecteur y sous la forme

$$y=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ z\end{pmatrix}.$$

Démontrer que λ_i est une valeur propre de la matrice

$$\tilde{C}_{n-1}=C_{n-1}+\frac{\bar{\varepsilon}}{1-|\varepsilon|^2}zc.$$

8.4.46. Démontrer que dans l'énoncé du problème 8.4.45 il existe une matrice $\tilde{C}$ telle que

a) $\|C-\tilde{C}\|_2\leq\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1-|\varepsilon|^2}}\|C\|_2$;

b) $\tilde{C}$ admet une valeur propre multiple λ_1.

8.4.47. Soient x et y des vecteurs propres normés des matrices A et A^*, associés à λ_1 et $\bar{\lambda}_1$ respectivement. De plus, $|s|=|(x, y)|=\varepsilon\ll 1$. Démontrer qu'il existe une matrice $\tilde{A}$ telle que :

a) $\|A-\tilde{A}\|_2\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\|A\|_2$;

b) $\tilde{A}$ admet une valeur propre multiple λ_1. Par là même l'existence pour des matrices adjointes d'un couple de vecteurs propres quasi orthogonaux associés aux valeurs propres adjointes témoigne de l'existence d'une matrice proche à valeur propre multiple.

INDICATIONS

1.1.18. En n'appliquant que la distributivité et l'existence d'un élément opposé, démontrer que, pour tout vecteur x, $0\cdot x=0$. Déduire de là que $(-1)\cdot x=-x$. Puis, en appliquant l'associativité de l'addition, démontrer que $x+y=y+x$.

1.2.28. Noter la combinaison linéaire $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_s x_s$ des vecteurs $x_1, \ldots, x_s$. En supposant que parmi les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ il y a des coefficients non nuls et que parmi ces derniers λ_j est maximal en module, montrer que la j-ième composante du vecteur $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_s x_s$ est différente de zéro.

1.3.16. Utiliser le théorème 15.1 (V. Voïévodine, p. 49).

1.3.25. Utiliser 1.3.17 et 1.3.19.

1.3.26. Montrer que chacune des transformations élémentaires conduit à un système équivalent de vecteurs.

1.3.34. Soit r le rang du système de vecteurs $x_1, \ldots, x_s$. Alors, les premières r lignes de la matrice réduite à la forme trapézoïdale (cf. solution du problème 1.2.18) sont non nulles. Supposons que dans la matrice initiale ce sont les lignes d'indices $i_1, \ldots, i_r$. Démontrer que les vecteurs $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ constituent la base du système donné.

1.3.36. Arranger la réduction de façon que les éléments nuls se situent dans les dernières ligne et colonne de la matrice.

1.3.37. Avant de commencer la réduction, diminuer la grandeur des coordonnées des vecteurs par des transformations élémentaires.

1.3.39. Si $x_j=\alpha_1 x_{i_1}+\ldots+\alpha_r x_{i_r}$, alors on peut prendre comme vecteur x_{i_t} tout vecteur pour lequel dans cette décomposition le coefficient α est différent de zéro.

1.3.44. Utiliser 1.3.23.

1.4.41. Compléter la base arbitraire du sous-espace L jusqu'à la base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace V. Obtenir par des transformations élémentaires du système $e_1, \ldots, e_n$ une base qui satisfait aux conditions du problème.

1.5.16. Utiliser 1.5.14. **1.5.18.** Utiliser 1.5.16.

2.1.2. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base de l'espace vectoriel donné. Adoptons pour des vecteurs arbitraires $x=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n$ et $y=\beta_1 e_1+\ldots+\beta_n e_n$

$$(x, y)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n.$$

Vérifier si toutes les propriétés d'un produit scalaire sont respectées.

2.1.8. Obtenir la nécessité de la condition $ac>b^2$ en considérant le carré scalaire (x, x) du vecteur de la forme $x=(\alpha_1, 1)$ comme un trinôme carré de α_1.

2.1.9. Obtenir pour le carré scalaire du vecteur $x=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ la représentation

$$(x, x)=\alpha_1^2+(3\alpha_1+\alpha_2)^2+(\alpha_2+\alpha_3)^2.$$

2.1.10. Pour vérifier le 4-ième axiome d'un produit scalaire, appliquer l'inégalité: $2|a_{ij}||\alpha_i||\alpha_j|\leq|a_{ij}||\alpha_i|^2+|a_{ij}||\alpha_j|^2$.

2.1.15. Introduire arbitrairement le produit scalaire sur un sous-espace supplémentaire de L et utiliser 2.1.13.

2.1.16. Cf. V. Voïévodine, théorème 27.2, p. 93.

2.1.18. d) Utiliser 2.1.16.

2.2.23. Pour chaque i, $1 \leq i \leq k$, les vecteurs $y_1, \ldots, y_i$ et $z_1, \ldots, z_i$ forment une base orthogonale de l'enveloppe linéaire tendue sur les vecteurs $x_1, \ldots, x_i$. C'est pourquoi $(y_l, z_m)=0$ pour $l \neq m$.

2.2.25. Cf. indication au problème 2.1.2.

2.3.7. a) Interpréter chacune des équations du système comme la condition d'orthogonalité du vecteur $z=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et du vecteur composé de coefficients de l'équation.

2.3.9. Appliquer la base du supplémentaire orthogonal trouvé dans 2.3.6.

2.3.11. Cf. solution du problème 2.3.10.

2.3.14. Les coefficients des équations du système donnent les coordonnées des vecteurs sur lesquels est tendu $L^{\perp}$. Trouver par le procédé du problème 2.3.10 la perpendiculaire z, puis y comme la différence $x-z$.

2.3.27. Composer la base de V comme une réunion des bases des sous-espaces $L_1, \ldots, L_p$ et introduire dans V le produit scalaire d'après 2.2.25.

2.4.16. Montrer que dans la décomposition du vecteur x: $x=y+z$, où $y \in L$, $z \perp L$, le vecteur $y \in L_2$ et, par conséquent, la perpendiculaire abaissée de x sur L_2 coïncide avec la perpendiculaire z abaissée de x sur L.

2.4.17. La perpendiculaire z abaissée du vecteur x sur L est colinéaire au vecteur a.

2.4.19. Utiliser 2.4.17.

2.4.20. Pour calculer le cosinus de l'angle compris entre x et un vecteur arbitraire u de sous-espace L, appliquer la décomposition $x=y+z$, où $y \in L$, $z \perp L$.

2.4.23. Cf. indication à 2.4.16.

2.5.2. De même que dans le problème 2.1.2 (cf. indication), fixons la base $e_1, \ldots, e_n$ et pour des vecteurs arbitraires x et y adoptons $(x, y)=\alpha_1\bar{\beta}_1+\ldots+\alpha_n\bar{\beta}_n$.

2.5.5. Cf. indication à 2.1.10.

2.5.13. c) Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de l'espace R, montrer que tout vecteur de C est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1+i0, \ldots, e_n+i0$.

3.1.21. Obtenir pour le nombre m_n de termes non nuls du déterminant d'ordre n de la forme donnée la récurrence : $m_n=m_{n-1}+1$. En outre, $m_1=1$.

3.1.22. Obtenir la récurrence : $m_n=m_{n-1}+m_{n-2}$ pour le nombre m_n de termes non nuls du déterminant d'ordre n de la forme donnée. La solution générale d'une telle équation (cf. § 3.0) : $m_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Les constantes c_1 et c_2 se déterminent d'après les conditions : $m_1=1$, $m_2=2$.

3.1.23. Obtenir la récurrence : $m_n=2m_{n-1}$ pour le nombre m_n de termes non nuls du déterminant d'ordre n de la forme donnée. De plus, $m_1=1$.

3.1.25. Soit $P_n(t)$ le déterminant d'ordre n de la forme donnée. Obtenir la récurrence suivante : $P_n(t)=tP_{n-1}(t)+a_1$.

3.1.34. Montrer que la transformation donnée du déterminant est équivalente à la multiplication de ses lignes par $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ et de ses colonnes par $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \ldots, \alpha^{-n}$ respectivement.

3.1.35. Appliquer 3.1.34. **3.1.36.** Transposer le déterminant.

3.1.37. Transposer le déterminant. **3.1.40.** Utiliser 3.1.38.

3.1.42. Transposer le déterminant et utiliser 3.1.40.

3.1.43. La transformation indiquée du déterminant peut être remplacée par la transposition par rapport à la diagonale principale et la permutation des lignes dans l'ordre inverse.

3.1.44. Le polynôme du quatrième degré possède au plus quatre racines distinctes.

3.1.56. Différencier le terme général du déterminant.

3.2.6. Utiliser 3.1.35.

3.2.20. Le déterminant donné est d'une forme quasi triangulaire. Si on décompose ce déterminant suivant les deux premières colonnes, la somme compte seulement trois termes.

3.2.26. Décomposer le déterminant suivant les trois premières colonnes.

3.2.33. Retrancher la première ligne de la deuxième, de la troisième et de la quatrième.

3.2.45. Montrer que pour le déterminant d_n de la forme donnée on observe la récurrence $d_n = 2\cos\alpha d_{n-1} - d_{n-2}$. De plus, $d_1 = \cos\alpha$, $d_2 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

3.3.1. Le vecteur b_i s'obtient en retranchant de a_i la combinaison linéaire des vecteurs $a_1, \ldots, a_{i-1}$.

3.3.15. Cf. V. Voïévodine, théorème 41.2, p. 137.

3.3.16. Tout mineur principal du déterminant de Gram est encore un déterminant de Gram pour le sous-système du système de vecteurs donné.

3.3.17. Utiliser 3.3.14. **3.3.18.** Utiliser 3.3.17 et 3.3.13.

3.3.23. Utiliser 3.3.17 et 3.3.13. **3.3.24.** Utiliser 3.3.18.

3.3.25. La longueur de la perpendiculaire abaissée du vecteur x_{l+1} sur l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_l$ ne dépasse pas la longueur de ce vecteur lui-même; la longueur de la perpendiculaire abaissée du vecteur x_j, $l+1 < j \leq k$ sur l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_{j-1}$ ne dépasse pas la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce vecteur lui-même sur l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_{l+1}, \ldots, x_{j-1}$.

3.3.32. Remplacer l'élément de la case $(n, 1)$ par $(-1)^n \cdot 2^{-(n-1)}$.

3.4.3. Utiliser 1.2.28.

3.4.4. Pour démontrer la dernière proposition du problème utiliser 3.3.25 et 3.4.3.

3.4.8. Réaliser des permutations des lignes et des colonnes pour faire passer le mineur M situé dans les premières ligne et colonne de la matrice et appliquer la méthode de Gauss.

3.4.9. Utiliser 3.2.11 en tenant compte que la méthode de Gauss consiste en une suite de transformations élémentaires des lignes et des colonnes du déterminant.

3.4.16. Avant d'appliquer la méthode de Gauss, diminuer la grandeur des éléments du déterminant par des transformations élémentaires.

3.4.17. Réduire les éléments de chaque ligne au même dénominateur et appliquer 3.4.16.

3.4.19. Dans chaque ligne faire sortir des parenthèses le facteur commun des éléments.

3.4.20. Cf. indication à 3.4.16.

3.4.24. Le déterminant s'obtient en bordant le déterminant du problème 3.4.10.

3.4.26. Le déterminant s'obtient en bordant le déterminant du problème 3.4.24.

3.4.35. b) Appliquer les formules du $(k+1)$-ième pas de la méthode d'élimination en tenant compte que les relations $\dfrac{a_{i,k+1}^{(k)}}{a_{k,k+1}^{(k)}}$, $i > k+1$, sont bornées par l'unité en module.

3.4.41. Appliquer à chacun des n groupes de n lignes du déterminant D les transformations qui ramènent la matrice A à une forme triangulaire. On obtient le déterminant dont la matrice se compose de m^2 blocs triangulaires. Ce déterminant peut être décomposé en utilisant le théorème de Laplace d'une façon analogue à 3.2.27, b).

4.1.2. Démontrer que le rang du système de colonnes est $n-1$.

4.1.3. Démontrer en utilisant 4.1.2 que les colonnes de la matrice A contenant le mineur M constituent la base du système de colonnes.

4.1.4. Utiliser 1.3.39.

4.1.6. Examiner la sous-matrice formée par r colonnes linéairement indépendantes données. Montrer que les lignes comportant le mineur sont dans cette sous-matrice des lignes de base.

4.1.9. Le rang de la matrice de Gram est égal à l'ordre le plus élevé des mineurs principaux différents de zéro de cette matrice. Pour les mineurs principaux d'une matrice de Gram, cf. 3.3.16.

4.1.11. Utiliser 3.1.36.

4.1.12. Les premières r colonnes contiennent au moins un mineur non nul d'ordre r.

4.1.20. L'augmentation indiquée du rang peut s'obtenir en changeant les éléments du mineur complémentaire du mineur de base.

4.1.22. Utiliser 4.1.19. **4.1.29.** Les lignes de la matrice sont orthogonales.

4.1.30. Cf. 1.2.28.

4.1.36. Démontrer que le mineur d'ordre k situé dans les premières ligne et colonne n'est pas nul.

4.2.5. Utiliser 4.2.4. **4.2.9.** Cf. 1.4.38.

4.2.19. Etablir l'isomorphisme entre M et un sous-espace arbitraire supplémentaire de L.

4.2.33. Le fait que l'intersection est un plan se déduit de 4.2.14. De plus, si $L_1, \ldots$ $\ldots, L_k$ sont des sous-espaces directeurs des hyperplans donnés, il vient

$$\dim(\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_k) = \dim(L_1 \cap \ldots \cap L_k).$$

Maintenant démontrer par récurrence que dans un espace de dimension n la dimension de l'intersection des k sous-espaces de dimension $(n-1)$ n'est pas inférieure à $n-k$.

4.3.3. Si $\pi = x_0 + L_{n-1}$ est l'hyperplan donné, alors, en le mettant sous la forme $(n, x) = b$, on peut prendre comme vecteur n tout vecteur non nul de $L_{n-1}^{\perp}$. En outre, $b = (n, x_0)$.

4.3.9. a) s'ensuit de 4.3.8; b) s'ensuit de 4.2.34 et 4.3.7.

4.3.11. Utiliser 4.2.6.

4.3.17. Dans un espace euclidien, la distance jouit évidemment de la propriété $\varrho(x, u) = \varrho(x - x_0, u - x_0)$.

4.3.20. Cf. indication à 4.3.17.

4.3.24. Constater que $L(p_1, p_2, q_1, q_2)$ peut être décrit par l'équation $\alpha_3 = 0$.

4.3.25. Le vecteur $x_0 - y_0$ est orthogonal au sous-espace $L(p_1, p_2, q_1, q_2)$.

4.3.27. Introduire dans l'espace le produit scalaire de façon que la base donnée devienne orthonormée.

4.3.28. Cf. indication à 4.3.27.

4.3.29. Soit $e_1, \ldots, e_k$ la base du sous-espace directeur du plan P. Compléter jusqu'à la base le système de vecteurs linéairement indépendant $e_1, \ldots, e_k, x$, puis, à l'aide de cette base, introduire le produit scalaire.

4.4.2. Les sous-espaces $L(u_1, \ldots, u_m)$ et $L(v_1, \ldots, v_l)$ doivent coïncider.

4.4.11. Cf. 4.4.10 et 4.4.3. **4.4.12.** Utiliser 4.4.10.

4.4.24. Réaliser le changement de variables $t_1 = 3x_1$; $t_2 = 2x_2$.

4.4.28. Utiliser 4.1.36.

4.4.30. Trouver la base du supplémentaire orthogonal à $L(y_1, y_2, y_3)$.

4.4.32. Si on ajoute d'une façon arbitraire la n-ième ligne à la matrice du système, les nombres $(-1)^i A_i$ de la matrice carrée obtenue sont (au signe près, le même pour tous les n nombres) des cofacteurs des éléments de la n-ième ligne. **4.4.34.** Utiliser 4.4.32. **4.5.3.** Utiliser 4.5.2. **4.5.10.** Cf. 4.4.14.

4.5.18. Réaliser le changement de variables $t_1 = 6x_1$; $t_2 = 3x_2$; $t_3 = 11x_3$; $t_4 = -5x_4$.

4.5.19. Multiplier la troisième équation du système par 10, la quatrième par 10^{-1}, après quoi réaliser le changement de variables : $t_1 = 1000x_1$; $t_2 = 0{,}001x_2$; $t_3 = 0{,}1x_3$; $t_4 = 10x_4$.

4.5.34. Cf. 4.4.28.

4.5.36. Construire la solution générale du système d'équations donné et trouver le système fondamental des solutions du système homogène réduit. Tenir compte du fait que la solution normale doit être orthogonale à ce système fondamental.

4.5.48. Décomposer le polynôme $f(t)$ par rapport à la base $1, t-a_1, (t-a_1)^2, \ldots$ $\ldots, (t-a_1)^n$.

4.5.50. Démontrer que les conditions homogènes correspondantes ne sont satisfaites que par le polynôme nul.

4.5.52. Utiliser les formules de Cramer et 3.1.56.

5.1.8. $Ax = (a, b)x - (a, x)b$. **5.1.49.** Utiliser 5.1.43.

5.1.56. Utiliser 5.1.43.

5.1.58. A chaque vecteur de T_A associer le plan de ses images réciproques.

5.1.60. D'après 5.1.59, le sous-espace T_A est isomorphe à l'espace quotient de l'espace X par le sous-espace N_A.

5.1.63. Utiliser 5.1.43.

5.1.65. Soit $y_1 = Ax_1, \ldots, y_k = Ax_k$ une base arbitraire du sous-espace L. Montrer que l'image réciproque complète L est somme directe des sous-espaces N_A et $L(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k)$. **5.2.3.** Utiliser 5.1.46.

5.2.9. L'ensemble des opérateurs qui appliquent l'espace X de dimension n dans un espace unidimensionnel est de dimension n (cf. 5.2.3).

5.2.14. Montrer que si M est un sous-espace arbitraire supplémentaire de N, les espaces ω_{MY} et K_N sont isomorphes.

5.2.15. a) Soit $e_1, \ldots, e_n$ une certaine base de X. Pour l'opérateur donné A de ω_{XL} fixons des décompositions quelconques des vecteurs $Ae_1, \ldots, Ae_n$ suivant les sous-espaces L_1 et L_2: $Ae_i = u_i + v_i$, $u_i \in L_1$, $v_i \in L_2$. Alors, $A = A_1 + A_2$, où $A_1 e_i = u_i$; $A_2 e_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. **5.2.16.** Utiliser 1.5.16.

5.2.17. Utiliser 5.2.4.

5.2.18. Démontrer que $T_{A+B} = X$.

5.2.24. D'après l'énoncé, $Ax = \lambda_x Bx$ et $Ay = \lambda_y B_y$ quels que soient les vecteurs non nuls x et y. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

5.2.25. Utiliser 5.2.14.

5.3.1. a) Utiliser les relations : $T_{BA} \subset T_B$ et $T_{BA} = BT_A$.

5.3.2. a) Utiliser l'égalité $(BA)X = BT_A$.

5.3.3. Utiliser les relations :

$$r_{BAC} = r_{AC} - \dim (T_{AC} \cap N_B), \qquad r_{BA} = r_A - \dim (T_A \cap N_B).$$

5.3.8. Utiliser 5.3.6. **5.3.11.** Utiliser 5.3.10.

5.3.14. Si $A^2 = 0$, alors $\alpha = 0$. Pour $A^2 \neq 0$, utiliser 5.2.25.

5.3.17. Montrer que l'intersection de N_P et T_P est composée seulement d'un vecteur nul; de plus, $PT_P = T_P$.

5.3.18. a) Utiliser 5.3.17.

5.3.20. Les opérateurs $E, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ sont linéairement dépendants.

5.3.23. Utiliser 5.3.16, 5.3.15. **5.3.24.** Utiliser 5.3.14.

5.3.29. Cf. 5.2.25. **5.3.33.** Utiliser 5.3.30.

5.3.34. Utiliser 5.2.24.

5.3.47. Si x est un vecteur non nul de N_A, alors $f(A)x \neq 0$ malgré la condition suivant laquelle $f(t)$ est un polynôme annulateur.

5.3.48. Si le terme constant est nul, on peut trouver un polynôme de plus petit degré annulant également l'opérateur donné.

5.3.49. Utiliser 5.3.20.

5.4.8. Calculer d'abord BC. **5.4.9.** Calculer d'abord BC.

5.4.28. Appliquer le théorème suivant lequel toute permutation peut être décomposée en un produit de transpositions.

5.4.35. Mettre la matrice J_λ sous la forme $J_\lambda = \lambda E + A$, où A est une cellule de Jordan associée au nombre 0, et utiliser le résultat du problème 5.4.33.

5.4.36. b), c) Construire pour la matrice diagonale donnée A le polynôme d'interpolation $f(t)$ tel que $f(d_{ii}) = \lambda_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$.

5.4.40. Utiliser 5.4.39. **5.4.49.** Utiliser 5.4.33. **5.4.52.** Utiliser 5.4.34. **5.4.56.** Utiliser 5.4.23.

5.4.57. Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A, les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B.

5.4.59. Cf. 4.1.14.

5.4.69. Diviser les matrices A et B en quatre blocs carrés d'ordre 2 et appliquer le théorème de Strassen à ces blocs. Pour calculer le produit des blocs, appliquer l'algorithme de Strassen.

5.4.73. d) Utiliser la multiplication des matrices partitionnées.

5.4.77. b) Cf. 3.4.41.

5.5.12. En appliquant les propriétés de la symétrie (antisymétrie) par rapport aux diagonales principales et non principales, on peut se borner à calculer quatre mineurs. Pour calculer le déterminant, utiliser l'orthogonalité de ses lignes.

5.5.15. Utiliser le résultat du problème 5.5.12.

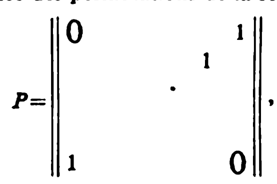
5.5.17. On peut, par exemple, utiliser la proposition du problème 5.3.49, d'après laquelle la matrice inverse A^{-1} est un polynôme de la matrice A.

5.5.18. Utiliser 5.4.49. **5.5.19.** Utiliser 5.4.52. **5.5.20.** Appliquer deux procédés pour trouver dans le produit $A^{-1}A = E$ la somme des éléments de la i-ième ligne.

5.5.27. Mettre la matrice sous la forme $a\left(E+\frac{1}{a}J_0\right)$ et utiliser 5.3.45; ici J_0 est une cellule de Jordan associée au nombre 0.

5.5.28. D'après 5.5.18, il suffit de calculer les éléments de la ligne supérieure de la matrice inverse.

5.5.32. Si P est une matrice des permutations de la forme



$$P=\begin{Vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & 0 \end{Vmatrix},$$

PA est alors une matrice triangulaire supérieure.

5.5.39. Obtenir, en commutant les lignes, que tous les mineurs pivots principaux deviennent différents de zéro.

5.5.46. Montrer que $J_n^2=nJ_n$.

5.5.49. Utiliser 5.5.47.

5.5.54. Utiliser 5.5.53.

5.5.56. Appliquer à la matrice 5.5.55 le résultat du problème 5.5.51.

5.5.57. Utiliser 5.5.53.

5.5.61. Mettre la matrice M sous la forme du produit

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & E_l \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{Vmatrix},$$

où k est l'ordre de la matrice A, $k+l$ l'ordre de la matrice M.

5.5.65. Utiliser 5.4.73, d). **5.5.66.** Cf. 5.5.60.

5.5.67. Utiliser les formules du problème 5.5.62.

5.5.68. Utiliser les formules du problème 5.5.64.

5.5.69. Utiliser 5.5.65.

5.5.72. Différentier l'égalité $AA^{-1}=E$.

5.5.77. Utiliser la formule du problème 5.5.75.

5.5.79. d) Utiliser la formule du problème 5.5.75.

5.6.12. Utiliser 5.6.9, c). **5.6.27.** Utiliser 5.6.16.

5.6.29. Examiner l'opérateur que la matrice A donne dans un couple de bases arbitraires des espaces X et Y. **5.6.30.** Utiliser 5.6.29.

5.6.32. Soit pour la matrice A, quelle que soit la matrice non dégénérée P,

$$P^{-1}AP=A \quad \text{ou} \quad AP=PA.$$

Vérifier que le lemme de Schur (cf. 5.4.40) reste vrai dans ce cas-là aussi si l'on suppose que A est commutable seulement avec toutes les matrices non dégénérées.

5.6.36. Montrer que la symétrie de la matrice par rapport à son centre est une transformation de similitude avec la matrice P (cf. indication à 5.5.32).

5.6.37. L'égalité des traces des matrices semblables peut se déduire de 5.4.22, c).

5.6.42. Utiliser 5.6.22.

6.1.17. La matrice A est un polynôme de la matrice J_n du problème 6.1.16.

6.1.19. Cf. V. Voïévodine, théorème 65.1, p. 215.

6.1.24. Utiliser le critère de la somme directe 1.5.18.

6.1.25. Pour démontrer la nécessité, utiliser 6.1.24.

6.1.33. Cf. 5.4.37. **6.1.34.** Cf. 5.4.39. **6.1.35.** Cf. 5.4.36.

6.1.38. Mettre la condition $P^{-1}AP=A$ sous la forme $AP=PA$ et noter cette dernière suivant les colonnes.

6.1.40. Utiliser la propriété du produit kroneckerien 5.4.73, d).

6.1.41. Cf. 5.6.42. **6.1.43.** Cf. 5.6.43. **6.2.2.** Cf. 3.2.4.

6.2.3. Le rang de la matrice vaut un.

6.2.4. Le rang de la matrice vaut deux. **6.2.7.** Utiliser 5.5.77.

6.2.13. Montrer que $m_t(A)=\mathrm{tr}\,(A^t)$.

6.2.19. Utiliser la matrice d'opérateur de 5.6.2.

6.2.20. Utiliser la matrice d'opérateur de 5.6.3, a).

6.2.21. Cf. 6.1.8.

6.2.41. Examiner la matrice d'opérateur dans la base dont les premiers vecteurs forment la base du sous-espace propre associé à λ. A l'aide de cette matrice calculer le polynôme caractéristique de l'opérateur.

6.2.49. Montrer que pour toute valeur propre λ_0 le rang de la matrice $\lambda_0 E-C(f(\lambda))$ est égal à $n-1$.

6.2.56. La matrice P^T est une matrice de Frobenius du polynôme $f(\lambda)=\lambda^n-1$.

6.2.60. Utiliser l'égalité matricielle

$$\left\|\begin{matrix}\lambda E_m-AB & A\\ 0 & \lambda E_n\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}E_m & 0\\ B & E_n\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}E_m & 0\\ B & E_n\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\lambda E_m & A\\ 0 & \lambda E_n-BA\end{matrix}\right\|.$$

6.2.61. Utiliser l'égalité matricielle

$$\left\|\begin{matrix}E & E\\ 0 & E\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\lambda E-A & -B\\ -B & \lambda E-A\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\lambda E-(A+B) & 0\\ -B & \lambda E-(A-B)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}E & E\\ 0 & E\end{matrix}\right\|.$$

6.2.64. Utiliser l'égalité matricielle

$$\left\|\begin{matrix}E & iE\\ 0 & E\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\lambda E-B & C\\ -C & \lambda E-B\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\lambda E-A & 0\\ -C & \lambda E-\bar{A}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}E & iE\\ 0 & E\end{matrix}\right\|,$$

$A=B+iC$, $\bar{A}=B-iC$.

6.3.5. Cf. 6.1.25.

6.3.6. Tout sous-espace de dimension $k-1$ peut être mis sous la forme d'une intersection de deux sous-espaces de dimension k. Par là même tout sous-espace de dimension $k-1$ est également invariant par rapport à A.

6.3.9. Appliquer 6.3.3 à l'opérateur $A-\lambda_0 E$, où λ_0 est la valeur propre de A.

6.3.21. Utiliser 6.3.18, a).

6.3.26. Utiliser 6.3.14 et 6.3.25. **6.3.27.** Utiliser 6.3.14.

6.3.28. Si n est la dimension de l'espace, G compte au plus n^2 opérateurs linéairement indépendants; c'est pourquoi il suffit de démontrer la proposition pour un nombre fini d'opérateurs de permutation, par exemple, par récurrence sur ce nombre.

6.3.30. Dans chaque couple de sous-espaces invariants de l'opérateur de dérivation, l'un des sous-espaces est emboîté dans l'autre.

6.3.32. Supposons que toutes les racines du polynôme caractéristique soient complexes; chacun d'entre eux est une valeur propre de l'opérateur correspondant $\hat{A}$. Montrer que si λ est une valeur propre arbitraire de $\hat{A}$, $z=x+iy$, le vecteur propre de $\hat{A}$ associé à λ, alors le sous-espace tendu sur les vecteurs réels x et y est de dimension 2 et est invariant par rapport à A.

6.3.36. Utiliser 6.3.9. **6.3.38.** Utiliser 6.3.19.

6.3.39. Utiliser 6.3.19.

6.3.42. Montrer que pour chacune des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, le défaut de la matrice $B-\lambda_i E$ est égal à k_i.

6.3.46. Reprendre la construction du problème 6.3.38 en tenant compte du problème 6.3.32.

6.3.49. Cf. 6.3.48, b).

6.4.1. Démontrer que pour le nombre q indiqué dans 5.3.10, les sous-espaces N_q et T_q se coupent seulement suivant le vecteur nul.

6.4.2. Soit $X=N\dotplus T$ la décomposition obtenue dans 6.4.1, où N est le noyau et T l'image de l'opérateur A^q. Si $X=N_1\dotplus T_1$ est une autre décomposition quelconque, telle que A/N_1 soit un opérateur nilpotent et A/T_1 un opérateur non dégénéré, montrer que $N_1\subset N$, $T_1\subset T$.

6.4.3. Le polynôme caractéristique de l'opérateur A est égal au produit des polynômes caractéristiques des opérateurs A/N et A/T.

6.4.4. Appliquer 6.4.1 à l'opérateur $A-\lambda_1 E$ et montrer que dans la décomposition $X=N_1 \dotplus T_1$ le sous-espace N_1 possède toutes les propriétés imposées à $K_{\lambda 1}$. Ensuite décomposer le sous-espace T_1 en partant de l'opérateur $A-\lambda_2 E$, etc.

6.4.5. Utiliser 6.4.2 et 6.3.43. **6.4.9.** Cf. 6.3.50.

6.4.10. Utiliser la décomposition (6.4.2). **6.4.11.** Utiliser 6.4.10.

6.4.14. Pour trouver les valeurs propres de la matrice utiliser 6.2.61.

6.4.37. Comparer avec 6.3.17. **6.4.38.** Utiliser 6.4.17, e) et 6.4.37.

6.4.41. Choisir des vecteurs linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_p$ tels que leur enveloppe linéaire donne dans la somme directe avec H_{t-1} l'espace X tout entier.

6.4.49. d) $m_{t-1}-m_{t-2}=p_2$.

6.4.57. D'après 6.4.56, la suite des nombres $p_1, \ldots, p_t$ est non décroissante.

6.4.62. La matrice est ramenée par les mêmes permutations des lignes et des colonnes à la forme quasi diagonale.

6.4.72. Utiliser 6.4.18. **6.4.75.** Utiliser 6.4.34, 6.4.48, 6.4.55.

6.4.76. Utiliser la forme de Jordan de l'opérateur.

6.4.80. Elever au carré la matrice $J-\lambda_0 E$ et calculer l'accroissement du défaut; multiplier la matrice $(J-\lambda_0 E)^2$ par $J-\lambda_0 E$ et calculer l'accroissement du défaut, etc.

6.4.86. Remarquer que la matrice

$$B=\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

vérifie l'égalité $B^3=0$. En élevant la matrice $A-E$ à une puissance, utiliser le fait que la matrice est quasi triangulaire.

6.4.87. Cf. indication à 6.4.86. **6.4.88.** Le défaut de l'opérateur est égal à un.

6.4.91. Vérifier l'égalité des rangs et des traces des matrices A, B, C.

6.4.98. Utiliser 6.4.39.

6.4.100. Soit $A=P\Lambda P^{-1}$, où Λ est une matrice diagonale. Alors la matrice $A\times B$ est semblable à la matrice $\Lambda\times J$, et $A\times E_n+E_m\times B$ est semblable à $\Lambda\times E_n+E_m\times J$.

6.4.102. Utiliser 6.4.32.

7.1.9. Examiner la matrice de l'opérateur dans un système de coordonnées cartésien.

7.1.12. Remarquer que la base b) du problème 7.1.11 est orthonormée au sens du produit scalaire (7.1.2).

7.1.13. Vérifier si la base c) du problème 7.1.11 est orthogonale au sens du produit scalaire (7.1.3) et utiliser le résultat de 7.1.6.

7.1.22. Utiliser 6.4.77.

7.1.23. Utiliser la correspondance entre les opérateurs adjoints et les matrices adjointes.

7.1.34. Utiliser le résultat du problème 6.3.17.

7.1.40. Utiliser l'existence du vecteur propre commun des opérateurs commutables A^* et B^* et, par conséquent, du sous-espace invariant commun de dimension $n-1$ des opérateurs A et B. Ici n est la dimension de l'espace.

7.1.41. Utiliser le théorème de Schur. **7.1.45.** Utiliser 7.1.7. **7.2.8.** Cf. 7.1.10. **7.2.9.** Composer les matrices d'opérateurs dans la base orthonormée 1, t, $t^2, \ldots, t^n$.

7.2.10. Utiliser 5.4.52. **7.2.14.** Utiliser 7.1.16. **7.2.16.** Utiliser 7.1.15. **7.2.19.** Montrer que $N_A=N_{A^*}$.

7.2.20. Déduire de la condition donnée que les sous-espaces principaux de l'opérateur A coïncident avec ses sous-espaces propres et sont orthogonaux deux à deux. **7.2.23.** Utiliser 7.2.18.

7.2.24. Démontrer l'existence de la base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur A en reprenant le processus de construction de la base de Schur.

7.2.25. Utiliser 6.3.25. Une autre solution possible utilise 7.2.13.

7.2.26. Utiliser 7.2.25.

7.2.32. La matrice donnée se distingue de la matrice réelle par le terme $-iE$.

7.2.36. Introduire le produit scalaire à l'aide de la base de vecteurs propres de l'opérateur A.

7.2.38. En démontrant la nécessité, construire le polynôme d'interpolation $f(\lambda)$ tel que chaque valeur propre $\bar{\lambda}_i$ de l'opérateur A vérifie la condition $f(\lambda_i)=\bar{\lambda}_i$.

7.2.40. Cf. 7.1.40.

7.2.47. Utiliser la décomposition du vecteur x suivant la base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur A.

7.2.48. Appliquer 7.2.47 au vecteur $x=(1\ 1\ldots 1)^T$.

7.2.50. Montrer pour prouver la dernière proposition que dans le sous-espace propre de l'opérateur $\hat{A}$ associé à la valeur propre λ, on peut choisir une base composée de vecteurs « réels », c'est-à-dire de vecteurs de la forme $x+i0$.

7.3.9. Considérer la matrice d'opérateur dans la base orthonormée de vecteurs propres et utiliser le fait que par les points du plan complexe λ_1, λ_2, λ_3 on peut mener une circonférence.

7.3.13. Vérifier que $A^2=E$.

7.3.16. De l'énoncé du problème on peut déduire l'action exercée par l'opérateur sur le polynôme $1-2t+t^2$ orthogonal à deux polynômes donnés $1+t+t^2$ et $1-t^2$. Après avoir composé la matrice de l'opérateur Q dans la base formée par ces polynômes, passer à la base nécessaire $1, t, t^2$.

7.3.18. Cf. 7.3.19.

7.3.20. Utiliser la relation $(x, y)=\dfrac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}$ pour le cas réel, et $(x, y)=$ $=\dfrac{|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2}{4}$ pour le cas complexe.

7.3.39. Examiner la suite des matrices T_{12}, T_{13}, ..., T_{1n}, les paramètres de chacune d'elles étant choisis conformément à 7.3.38.

7.4.8. Prendre les vecteurs x et y pour la base de l'espace.

7.4.10. L'opérateur antisymétrique de l'espace tridimensionnel est dégénéré. Considérer la matrice d'opérateur K dans la base orthonormée dont l'un des vecteurs appartient au noyau K.

7.4.11. Vérifier si $(x_i, y_j)=(y_i, x_j)$ pour $i\neq j$.

7.4.15. Trouver le polynôme $f_3(t)$ orthogonal aux polynômes donnés $f_1(t)=2+2t-t^2$ et $f_2(t)=2-t+2t^2$ et de même longueur. On peut obtenir à partir des conditions de l'énoncé du problème la matrice d'opérateur S dans la base orthogonale $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, puis passer à la base nécessaire $1, t, t^2$.

7.4.27. Examiner la matrice d'opérateur A dans la base orthonormée de ses vecteurs propres. Mener par les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur le plan complexe une ligne droite.

7.4.32. D'après 7.4.30, la i-ième colonne unité e_i est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.

7.4.41. Montrer que les valeurs propres de la matrice hermitienne irréductible ne peuvent pas être multiples.

7.4.43. a) La racine commune des polynômes $f_{i+1}(\lambda)$ et $f_i(\lambda)$ est également la racine du polynôme $f_{i-1}(\lambda)$, etc. Mais le polynôme $f_0(\lambda)\equiv 1$ n'a pas de racines; b) utiliser a) et 7.4.35; c) utiliser les récurrences.

7.4.48. Calculer les suites (7.4.8) d'après les formules de récurrence liant les polynômes $f_i(\lambda)$. **7.4.51.** Montrer que la matrice A est semblable à la matrice hermitienne tridiagonale irréductible.

7.4.52. Pour démontrer b) utiliser 7.2.50.

7.5.9. Sans limiter la généralité, on peut considérer que la sous-matrice principale d'ordre k considérée se situe dans les premières ligne et colonne de la matrice donnée H. Dans ce cas il faut examiner le produit scalaire (Hx, x) pour ceux des vecteurs colonnes x dont seulement les k premières composantes peuvent être différentes de zéro.

7.5.10. Soient Γ la matrice de Gram, $x=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T$ le vecteur colonne de dimension k arbitraire. Montrer que $(\Gamma x, x)=|\bar{\alpha}_1 x_1+\ldots+\bar{\alpha}_k x_k|$.

7.5.16. a) Utiliser la décomposition du vecteur x suivant les vecteurs propres de l'opérateur H.

7.5.23. Utiliser 7.5.22. **7.5.24.** Utiliser le critère 7.5.18.

7.5.25. Utiliser 7.4.53.

7.5.27. Examiner la matrice associée H_k.

7.5.29. Montrer que le produit de Schur des matrices H_1 et H_2 est la sous-matrice principale du produit kroneckerien $H_1 \times H_2$.

7.5.32. Utiliser 7.4.38.

7.5.33. Utiliser la décomposition suivant les vecteurs propres de l'opérateur H.

7.5.34. a) Utiliser 7.5.23; b) utiliser 7.5.32.

7.5.36. Pour démontrer la suffisance de la condition utiliser 7.4.35.

7.5.41. Utiliser 7.5.24. **7.5.43.** Utiliser 7.5.30.

7.5.44. Appliquer le critère de Sylvester.

7.5.45. Cf. V. Voïévodine, p. 261. **7.5.49.** $H^2=4H$.

7.5.50. Pour extraire la racine carrée de la matrice H, utiliser l'inégalité d'Hadamard (cf. 3.3.3).

7.5.51. Utiliser 3.3.25. **7.5.55.** Utiliser 7.5.52.

7.5.56. Montrer que l'opérateur HS possède les mêmes valeurs propres que l'opérateur hermitien $S^{1/2}HS^{1/2}$.

7.5.62. Cf. V. Voïévodine, § 78.

7.6.8. Examiner les matrices de l'opérateur de dérivation et de son adjoint dans la base orthonormée $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

7.6.9. Pour le calcul des nombres singuliers, utiliser la matrice d'opérateur adjoint dans la base $1, t, t^2$, obtenue dans 7.1.12.

7.6.10. Soient X et Y des espaces euclidiens (unitaires) arbitraires de dimensions n et m respectivement. Examiner l'opérateur engendré par la matrice A dans le couple de bases orthonormées des espaces X et Y, et utiliser l'existence des bases singulières de cet opérateur.

7.6.17. Si $A=U\Lambda V$ est la décomposition singulière de la matrice A, U^* et V^* sont des matrices qui peuvent convenir.

7.6.26. Utiliser 6.3.51. **7.6.27.** Utiliser 7.6.26.

7.6.29. En utilisant 7.6.28 prouver que dans la forme de Schur de l'opérateur A, tous les éléments hors diagonaux de celle des colonnes et de celle des lignes à l'intersection desquelles se trouve λ_1 sont nuls.

7.6.30. En utilisant 7.6.29, démontrer l'existence de la base commune de vecteurs propres des opérateurs A et A^*.

7.6.33. La démonstration est analogue à celle de 7.4.38.

7.6.39. Les colonnes de la matrice sont orthogonales.

7.6.40. Le rang de la matrice vaut un. **7.6.42.** Utiliser 7.6.20.

7.6.43. La matrice est symétrique.

7.6.45. Vérifier si la matrice est unitaire au facteur numérique 2 près.

7.6.46. Utiliser 7.6.36. **7.6.50.** Cf. solution de 7.6.49.

7.6.51. Utiliser l'égalité $A/T_{A^*}=(H/T_A)(U/T_{A^*})$ ou $(H/T_A)^{-1}(A/T_{A^*})=U/T_{A^*}$.

7.6.62. Utiliser 7.6.59. **7.7.2.** Utiliser 7.4.24.

7.7.8. Utiliser 7.4.16.

7.7.13. Utiliser l'existence de la base orthonormée commune de vecteurs propres des opérateurs normaux commutables (cf. 7.2.40).

7.7.17. b) AH est semblable à la matrice $H^{1/2}AH^{1/2}=H^{1/2}H_1H^{1/2}+iH^{1/2}H_2H^{1/2}$.

7.7.18. Réaliser la transformation de similitude $\tilde{A}=DAD^{-1}$, où D est la matrice diagonale aux éléments diagonaux positifs choisis de façon que pour $i=1, 2, \ldots, n-1$ la matrice $\tilde{A}$ vérifie : $\tilde{a}_{i,i+1}=-\overline{\tilde{a}_{i+1,i}}$. Ensuite, appliquer le théorème de Bendixon (cf. 7.7.15).

7.7.19. Appliquer le théorème de Bendixon.

7.7.20. Examiner l'égalité $AH_1^{-1}=E+iH_2H_1^{-1}$ et montrer que $|\det(AH_1^{-1})|\geq 1$.

7.7.21. Examiner la décomposition hermitienne de la matrice d'opérateur A dans la base de Schur et utiliser 7.5.50.

7.8.8. Utiliser 7.5.62.

7.8.11. Le vecteur $b=(1\ 1\ 1)^T$ est orthogonal à T_A.

7.8.15. La matrice du système est non négative.

7.8.18. Le système se décompose en deux systèmes, un par rapport à x_1, x_4, et l'autre par rapport à x_2, x_3, x_5.

7.8.22. Utiliser 7.8.5. **7.8.23.** Utiliser 7.8.6. **7.8.32.** Utiliser 7.8.7. **7.8.37.** Utiliser 7.1.32 et 7.8.26.

7.8.38. L'énoncé implique $T_{BA}=T_B$, $N_{BA}=N_A$. Pour démontrer la relation nécessaire, utiliser 7.8.26.

7.8.39. Montrer que les deux opérateurs agissent de la même façon sur les vecteurs de la base singulière $e_1, \ldots, e_n$.

7.8.42. a), b). Utiliser 7.8.41; c) montrer d'abord que l'image et le noyau de l'opérateur X sont les mêmes que pour l'opérateur A^*; puis déduire de l'équation $A^*AX=A^*$ que l'action de X sur le couple de sous-espaces T_A et T_{A^*} est opposée à celle de l'opérateur A.

7.8.43. Utiliser 7.8.42, a).

7.9.6. La démonstration est la même que pour la loi d'inertie.

7.9.11. Utiliser la loi d'inertie.

7.9.14. Constater que dans le passage de D_{k-1} à D_{k+1} le nombre de coïncidences de signes et le nombre de changements de signes augmentent chacun de un indépendamment du signe attribué à D_k. De plus, le nombre de valeurs propres positives et celui de valeurs propres négatives de la sous-matrice A_{k+1} est chacun plus grand de un que le nombre correspondant de la sous-matrice A_{k-1}.

7.9.39. Cf. 7.9.40. **7.9.40.** Utiliser 5.6.36.

7.9.42. Montrer que dans la transformation non dégénérée des deux formes, les racines z de l'équation ne changent pas.

7.9.44. Utiliser 7.2.40.

7.9.50. Soient A et B les matrices des formes quadratiques F et G, et supposons que $B=S^TS$ soit la décomposition triangulaire de la matrice B. Les racines z de l'équation $|A-zB|=0$ sont des valeurs propres de la matrice symétrique $(S^{-1})^TAS^{-1}$; on peut donc utiliser 7.4.30.

8.1.2. d). Utiliser l'inégalité de Minkowski.

8.1.20. Montrer que la limite a de toutes les sous-suites est la même et que a est la limite de la suite toute entière.

8.1.22. Utiliser 8.1.21.

8.1.23. La base de l'espace étant fixée, les coordonnées de tous les vecteurs de la suite donnée sont bornées.

8.1.32. Utiliser l'équivalence de la convergence en norme quelconque et de la convergence par coordonnées.

8.1.35. Examiner la valeur de chacune des normes sur la boule unité de l'autre norme.

8.1.38. Utiliser 8.1.35. **8.1.50.** Utiliser 8.1.49.

8.2.6. Démontrer la proposition b) de la norme d'opérateurs subordonnée, puis utiliser l'équivalence des normes.

8.2.18. Utiliser 7.1.17. **8.2.21.** b), c). Utiliser 7.6.34.

8.2.22. Utiliser les relations

$$H_1=\frac{1}{2}(A+A^*), \qquad H_2=\frac{1}{2i}(A-A^*).$$

8.2.27. Utiliser 7.6.64 et 7.6.34.

8.2.28. Montrer qu'une matrice non négative A vérfie l'égalité : $S(A)=\operatorname{tr} A$.

8.2.29. Utiliser 8.1.34. **8.2.37.** Utiliser 8.2.34.

8.2.39. Utiliser la représentation de la norme subordonnée de 8.2.38.

8.2.41. Pour la norme donnée $M(A)$ posons $m(x)=M(X)$, où X est la matrice dont la première colonne est x, alors que les autres colonnes sont nulles. Montrer que $m(x)$ est une norme dans un espace arithmétique et que $M(A)$ et $m(x)$ concordent.

8.2.44. Utiliser 8.2.42 et 8.2.39.

8.2.46. Utiliser 8.2.45.

8.3.3. Utiliser 8.3.2.

8.3.5. Utiliser 7.6.33.

8.3.6. Utiliser 3.3.32 et 8.3.5.

8.3.7. Utiliser 7.6.33. La solution est analogue à celle de 8.3.5.

8.3.8. Mettre A sous la forme $A=D(E+D^{-1}B)$, où D est une matrice diagonale composée d'éléments diagonaux de A.

8.3.10. Appliquer le critère du problème 8.3.9. à la transposée A^T.

8.3.11. Cf. indication à 8.3.8.

8.3.25. Vérifier si $|\det A|=1$. C'est pourquoi (cf. 8.3.24) l'augmentation du nombre de conditionnement n'est possible qu'au dépens de l'augmentation de la norme de la matrice. Montrer que le nombre de conditionnement des matrices à norme euclidienne plus grande qui vérifient les conditions du problème est plus petit.

8.3.27. Utiliser l'expression de $\text{cond}_2\,(A+\alpha E)$ par les valeurs propres de la matrice A.

8.3.28. Cf. 7.4.35.

8.3.30. Pour évaluer le nombre de conditionnement, utiliser les inégalités du problème 7.6.28. Si on multiplie la première ligne du système par 10^{-1}, la deuxième par 10, la troisième par 100, la matrice du système obtenu devient symétrique.

8.3.35. Montrer qu'on peut prendre comme approximation de la solution exacte du système donné la solution du système $D(x)=b$, où

$$D=\begin{Vmatrix} 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}, \quad b=\begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

8.3.36. Montrer que comme approximation de la solution exacte du système donné on peut prendre la solution du système $Bx=b$, où

$$B=\begin{Vmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad b=\begin{Vmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

8.3.37. Utiliser l'identité $B^{-1}-A^{-1}=A^{-1}(A-B)B^{-1}$.

8.4.1. Cf. 8.2.41, ainsi que V. Voïévodine, p. 276.

8.4.4. Démontrer que la matrice est définie positive.

8.4.7. Appliquer 8.4.1 à la matrice de Frobenius du polynôme $f(z)/a_n$.

8.4.9. Utiliser 6.4.102.

8.4.12. Utiliser le théorème de Schur.

8.4.15. Utiliser 6.4.102.

8.4.17. Utiliser l'inégalité de Schur et la proposition 8.4.14.

8.4.23. Examiner la matrice donnée envisagée comme une perturbation de la matrice

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8.4.25. Utiliser les inégalités du problème 7.4.38.

8.4.27. La matrice donnée est semblable à la matrice symétrique

$$\begin{Vmatrix} 2\cdot 10^{-4} & -3\cdot 10^{-4} & 4\cdot 10^{-4} & 0,9991 \\ -3\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} & -0,4993 & -6\cdot 10^{-4} \\ 4\cdot 10^{-4} & -0,4993 & 2\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} \\ 0,9991 & -6\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} \end{Vmatrix},$$

qu'on peut envisager comme une perturbation de la matrice symétrique B telle que $b_{14}=b_{41}=1$, $b_{23}=b_{32}=-0,5$, tandis que les autres éléments b_{ij} sont nuls.

8.4.28. Utiliser les inégalités du problème 7.4.38.

8.4.29. Envisager la matrice donnée comme une perturbation de la matrice symétrique B telle que $b_{11}=b_{22}=1$, $b_{12}=b_{21}=-2$, $b_{34}=b_{43}=-1$, alors que les autres éléments b_{ij} sont nuls.

8.4.30. Utiliser 7.4.38. **8.4.33.** Cf. 7.6.23.

8.4.34. La matrice normale A implique que la matrice $A-\mu E$ est également normale.

8.4.35. a) Sur le supplémentaire orthogonal du vecteur e_1 les valeurs propres de la matrice normale $A-\mu_0 E$ sont non inférieures à a en module; b) utiliser la condition $\|A\tilde{x}-\mu_0\tilde{x}\|_2=\varepsilon$; d) utiliser l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

8.4.37. Cf. 8.4.34.

8.4.39. c) Utiliser l'estimation (8.4.6).

8.4.40. Utiliser le théorème de Schur. **8.4.41.** Utiliser le théorème de Schur.

8.4.46. Ajouter à C_{n-1} la matrice $\Delta_{n-1}=\dfrac{\bar{\varepsilon}}{1-|\varepsilon|^2}\,zc$ et évaluer $\|\Delta_{n-1}\|_2$.

8.4.47. Cette proposition se déduit de 8.4.46, ainsi que 8.4.44 est tirée de 8.4.43.

RÉPONSES ET SOLUTIONS

1.1.2. Oui, si la droite passe par le point O; non, dans le cas contraire. **1.1.3.** Non. **1.1.4.** Non.

1.1.7. Non. **1.1.8.** Oui.

1.1.10. 2^k.

1.1.11. Oui. **1.1.12.** Oui.

1.1.13. Oui. **1.1.14.** Oui. **1.1.15.** Non. **1.1.16.** a) Non; b), c), d) oui.

1.1.17. Soit G un groupe additif abélien contenant plus d'un élément. Fixons un certain corps P et pour tout $x \in G$ et tout $\lambda \in P$ adoptons $\lambda x = 0$.

Ainsi, le sens de l'axiome $1 \cdot x = x$ consiste dans le fait qu'en multipliant les vecteurs de l'espace donné par des nombres arbitraires, on peut obtenir tous les vecteurs.

1.2.9. a) Oui; b) oui; c) non.

1.2.11. Le système est linéairement indépendant.

1.2.12. Le système est linéairement dépendant.

1.2.13. Dans les deux cas : $5t^3 - 5t^2 - 4t + 6$. Le système est linéairement dépendant.

1.2.18. Soit $x_1, \ldots, x_s$ un système de vecteurs arbitraire d'un espace arithmétique. Composons la matrice des coordonnées de ces vecteurs :

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \ldots & \beta_{sk} \end{Vmatrix}.$$

Soit m la première colonne de cette matrice, qui comporte des nombres différents de zéro. On peut obtenir par permutation des lignes de la matrice (ce qui correspond à la permutation des vecteurs du système) que $\beta_{1m} \neq 0$. En retranchant maintenant des lignes (à partir de la deuxième) les multiples fixés de la première ligne, faisons que tous les éléments de la m-ième colonne, sauf le premier, soient des zéros. Les transformations réalisées des lignes de la matrice sont évidemment équivalentes à une suite de transformations élémentaires du type c) d'un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_s$. En opérant maintenant avec toutes les lignes de la matrice, sauf la première, reprenons le processus décrit, etc.

1.2.19. Le système est linéairement indépendant. **1.2.20.** Le système est linéairement dépendant. **1.2.21.** Le système est linéairement indépendant. **1.2.22.** Le système est linéairement dépendant. **1.2.23.** Le système est linéairement dépendant. **1.2.24.** Le système est linéairement indépendant. **1.2.25.** Le système est linéairement indépendant. **1.2.26.** Le système est linéairement indépendant. **1.2.27.** Le système est linéairement indépendant.

1.3.1. Tous les vecteurs sont de la forme $(\alpha, 0, \beta, 0, \gamma)$. **1.3.2.** Tous les vecteurs sont de la forme $(\alpha, \beta, \gamma, \beta, \alpha)$. **1.3.3.** Tous les vecteurs sont $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ qui vérifient la condition $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 0$.

1.3.4. Tous les polynômes de degré ≤ 2 et le polynôme nul. **1.3.5.** Même réponse que pour 1.3.4. **1.3.6.** Tous les polynômes de degré ≤ 2, dont la somme des coefficients est nulle, et le polynôme nul. **1.3.7.** Même réponse que pour 1.3.6.

1.3.8. Non.

1.3.11. $z_1=6x_2+4x_3$; $z_2=2x_1-10x_2+8x_3$.

1.3.14. Oui. **1.3.15.** Non.

1.3.28. 2. **1.3.29.** 2. **1.3.30.** 4. **1.3.31.** 3. **1.3.32.** 3. **1.3.33.** 4.

1.3.35. Par exemple, x_1, x_2. **1.3.36.** Par exemple, x_1, x_2, x_4. **1.3.37.** Par exemple, x_1, x_2, x_4. **1.3.38.** Par exemple, x_1, x_3.

1.3.40. a) Exactement r vecteurs du système sont différents de zéro; b) $r+1$ vecteurs du système sont différents de zéro; en outre, deux d'entre eux sont colinéaires; c) ou bien $r+2$ vecteurs du système sont différents de zéro, trois d'entre eux étant colinéaires, ou bien $r+1$ vecteurs du système sont différents de zéro et il existe un triplet de vecteurs linéairement dépendants dont aucun couple de vecteurs n'est colinéaire.

1.3.41. x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4.

1.3.42. Deux vecteurs quelconques. **1.3.43.** x_1, x_2; x_2, x_3; x_2, x_4.

1.3.45. Oui. **1.3.46.** Oui.

1.4.1. L'espace est unidimensionnel, sa base est un nombre quelconque différent de 1. **1.4.2.** La dimension de l'espace vaut k. **1.4.3.** L'espace est de dimension infinie. **1.4.4.** La dimension de l'espace est 2. **1.4.5.** L'espace est de dimension infinie. **1.4.6.** La dimension de l'espace est $n+1$.

1.4.7. a) 1; b) 2. **1.4.8.** a) n; b) $2n$.

1.4.13. La base est le système b).

1.4.21. La base est constituée, par exemple, des 1-er, 3-ième et 4-ième polynômes. **1.4.22.** La base est constituée, par exemple, des 1-er et 2-ième polynômes.

1.4.23. 1/3, 1/3, 1/3. **1.4.24.** 0, -5,4. **1.4.25.** 0, 2, 1, 2. **1.4.26.** 67, -51, -3, 11.

1.4.27. a) 1, -1, -1,1, -1,1; b) 2, -1, -1,1, -1,1; c) 1, -1, -1,2, -1,1.

1.4.28. $e=e_1-e_2$.

1.4.35. x_1, x_2, x_3, x_4. **1.4.36.** Par exemple, x_1, x_2, x_3.

1.4.37. La dimension de L est $n-1$.

1.4.38. a), b), c) n; d) $n-1$.

1.4.39. La base est constituée, par exemple, des 1-er, 2-ième et 3-ième polynômes.

1.4.43. Non.

1.5.2. Non. **1.5.3.** Non.

1.5.7. $L_2\subset L_1$. Les vecteurs x_1, x_2, x_3 sont linéairement indépendants. **1.5.8.** La base de la somme est constituée, par exemple, des vecteurs x_1, x_2, x_3, y_1. La dimension de l'intersection est 2.

1.5.10. La base de la somme est constituée, par exemple, de vecteurs x_1, x_2, y_1; la base de l'intersection, de vecteur $z=(3, 5, 7)$. **1.5.11.** La base de la somme est constituée, par exemple, de vecteurs x_1, x_2, x_3, y_1; la base de l'intersection est constituée, par exemple, de $z_1=(1, -1, 1, -1)$, $z_2=(2, 0, 2, 0)$. **1.5.12.** La base de la somme est constituée, par exemple, de x_1, x_2, x_3, y_2; la base de l'intersection est constituée de $z_1=(0, 4, 1, 3)$, $z_2=(2, 0, 1, -1)$.

1.5.20. $x=(-1, -2, -6, -3)+(3, 2, 6, 6)$.

1.5.23. Le sous-espace L est bidimensionnel. Comme sous-espace supplémentaire on prend, par exemple, les enveloppes linéaires des vecteurs $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$ et $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(0, 0, 0, 1)$.

1.5.24. Par exemple, l'ensemble des polynômes de la forme $c\cdot t^n$.

2.1.5. Changement de l'unité d'échelle pour la mesure des longueurs.

2.1.7. a) -1; b) 4; c) 0.

2.1.11. Oui, si $\alpha=0$; non, pour $\alpha\neq0$.

2.1.14. 0.

2.1.19. Non.

2.2.5. $y_1=x_1=(1, -2, 2)$, $y_2=\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $y_3=(6, -3, -6)$.

2.2.6. $y_1=x_1=(1, 1, 1, 1)$, $y_2=(2, 2, -2, -2)$, $y_3=(-1, 1, -1, 1)$.

2.2.10. Par exemple, de vecteurs $x_3=(1, 1, 1, 0)$ et $x_4=(-1, 1, 0, 1)$.

2.2.11. Par exemple, de vecteurs $x_3=(2, 3, 1, 0)$ et $x_4=(1, -1, 1, 1)$.

2.2.12. Par exemple, de vecteurs $x_3=(2/3, -1/3, 2/3)$.

2.2.13. Par exemple, de $x_3=(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $x_4=(1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

2.2.16. $n-1$, où n est la dimension de l'espace euclidien donné.

2.2.17. a) $(x, y)=\lambda_1^2\alpha_1\beta_1+\lambda_2^2\alpha_2\beta_2+\ldots+\lambda_n^2\alpha_n\beta_n$;
b) $(x, y)=(2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_n\beta_n)$.
Ici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont les coordonnées des vecteurs x et y dans les bases correspondantes.

2.2.19. $y_1=x_1=(2, 3, -4, -6)$, $y_2=(-3, 2, 6, -4)$, $y_3=(4, 6, 2, 3)$.

2.2.20. $y_1=x_1=(1, 1, -1, -2)$, $y_2=(2, 5, 1, 3)$, $y_3=(2, -1, 1, 0)$.

2.2.22. Soit $n\geq 3$. Composons d'après les lignes la matrice des coordonnées des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. Remarquons que si on change le signe de tous les éléments d'une colonne arbitraire de cette matrice, ses lignes donnent les coordonnées du nouveau système de vecteurs orthogonal comme auparavant. C'est pourquoi on peut considérer que la première ligne de la matrice ne se compose que d'unités, et les colonnes possibles des premières trois lignes ne sont que de la forme suivante :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1, & 1, & -1 & -1. \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Désignons par x, y, z, w respectivement le nombre de colonnes de chacune des formes indiquées. Il est alors évident que

$$x+y+z+w=n.$$

L'orthogonalité des premiers trois vecteurs entraîne

$$x+y-z-w=0,$$
$$x-y+z-w=0,$$
$$x-y-z+w=0.$$

On tire de ce système : $x=y=z=w=n/4$. Ainsi, n doit être un multiple de 4.

2.2.26. Si $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n$, $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots+b_nt^n$, il vient

$$(f, g)=a_0b_0+a_1b_1+(2!)^2a_2b_2+\ldots+(n!)^2a_nb_n.$$

2.3.6. Par exemple, $y_1=(-3, 1, -2, 0)$, $y_2=(1, -1, -2, 1)$.

2.3.8. a) Un espace unidimensionnel des polynômes dont tous les coefficients sont égaux; b) le sous-espace de tous les polynômes impairs.

2.3.9. Par exemple, $3\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0$,

$$\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0$$

pour le sous-espace L, et

$$\alpha_1+3\alpha_2+\quad 2\alpha_4=0,$$
$$3\alpha_1+7\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=0$$

pour son supplémentaire orthogonal.

2.3.10. Soit L l'enveloppe linéaire du système de vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ non strictement linéairement indépendant. Le vecteur recherché y peut être représenté par la combinaison linéaire $y=\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ka_k$. Comme $(z, a_i)=0$, $i=1, \ldots, k$, pour déterminer les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, on peut obtenir le système d'équations linéaires

$$(a_1, a_1)\alpha_1+(a_2, a_1)\alpha_2+\ldots+(a_k, a_1)\alpha_k=(x, a_1),$$
$$(a_1, a_2)\alpha_1+(a_2, a_2)\alpha_2+\ldots+(a_k, a_2)\alpha_k=(x, a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_1, a_k)\alpha_1+(a_2, a_k)\alpha_2+\ldots+(a_k, a_k)\alpha_k=(x, a_k).$$

Pour construire le vecteur y, on peut utiliser toute solution de ce système. Le vecteur z s'obtient comme la différence $x-y$.

2.3.11. Si le système $x_1, \ldots, x_k$ est linéairement indépendant.

2.3.12. $y=(5, 2, -9, -8)$, $z=(9, -5, 3, 1)$.

2.3.13. $y=(0, -3, 5, 2)$, $z=(2, -2, -2, 2)$.

2.3.14. $y=(1, 2, -5, 1)$, $z=(-4, -2, 0, 8)$.

2.3.16. Soient $e_1, \ldots, e_n$ la base donnée et $f_1, \ldots, f_n$ la base biorthogonale recherchée. Les conditions

$$(e_i, f_j)=0, \quad i=1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n,$$

montrent que le vecteur f_i doit appartenir au supplémentaire orthogonal de l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$. Dans ce sous-espace unidimensionnel, le vecteur f_j est bien défini par la condition $(e_j, f_j)=1$.

2.3.18. $f_1=(1, 0, 0, 0)$, $f_2=\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $f_3=\left(0, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$, $f_4=\left(0, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$.

2.3.19. $f_1=(1, 0, 0, 0)$, $f_2=(0, 1, 0, 0)$, $f_3=(-1, -2, 1, -3)$, $f_4=(0, 0, 0, 1)$.

2.3.20. $f_1=(1, 0, 0, 0)$, $f_2=(-1, 1, 0, 0)$, $f_3=(0, -1, 1, 0)$, $f_4=(0, 0, -1, 1)$.

2.3.21. $f_1=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $f_2=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$,
$f_3=\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $f_4=\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

2.4.2. a) Ne change pas; b) est remplacé par l'angle complémentaire (jusqu'à π); c) ne change pas.

2.4.4. $|x|=3\sqrt{2}$, $|y|=6$, $|x-y|=3\sqrt{2}$. Ainsi, le triangle est isocèle. $\widehat{x, (x-y)}=\frac{\pi}{2}$, de façon que le triangle est rectangle. $\widehat{x, y}=\frac{\pi}{4}$ et est un angle intérieur du triangle. $\widehat{y, (x-y)}=\frac{3\pi}{4}$ c'est pourquoi l'angle intérieur du triangle est $\widehat{y, (y-x)}$.

2.4.6. a) $|f|^2=10$, $|g|^2=9$, $|f-g|^2=3$; $|f|^2<|g|^2+|f-g|^2$, par conséquent, le triangle est acutangle; b) $|f|^2=19$, $|g|^2=13$, $|f-g|^2=4$; $|f|^2>|g|^2+|f-g|^2$, le triangle est obtusangle.

2.4.10. Pour un parallélogramme, les conditions de l'égalité des longueurs des côtés et de la perpendicularité des diagonales sont équivalentes.

2.4.14. a) t^2+3t+3; b) 3; c) $(3+m_3^2+\ldots+m_n^2)^{1/2}$.

2.4.18. a) 1; b) 1; c) α.

2.4.24. $\frac{\pi}{4}$. **2.4.25.** $\frac{\pi}{3}$.

2.5.8. L'égalité $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$ signifie que le produit scalaire des vecteurs x et y est un nombre strictement imaginaire.

2.5.10. L'orthogonalité des vecteurs $x+y$ et $x-y$ ne s'ensuit pas du fait que les longueurs des vecteurs x et y sont égales.

2.5.15. L'espace arithmétique complexe C_n.

2.5.19. Au vecteur iz correspond le vecteur $(-\beta_1, \ldots, -\beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dans R_{2n} est induit le produit scalaire naturel (2.2.1).

3.1.1. Appartient avec le signe plus. **3.1.2.** N'est pas un élément du déterminant.

3.1.3. Appartient avec le signe moins. **3.1.4.** N'est pas un élément du déterminant.

3.1.5 a) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}a_{61}a_{72}$;
b) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}a_{62}a_{71}$.

3.1.6. $i=j$; b) $i<j$; c) $i>j$.

3.1.7. Avec le signe plus.

3.1.8. $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

3.1.9. a) $i+j=n+1$; b) $i+j<n+1$; c) $i+j>n+1$.

3.1.10. Avec le signe $(-1)^{n(n-1)/2}$.

3.1.11. $(-1)^{n(n-1)/2}\cdot a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$.

3.1.12. $(-1)^{n-1}$. **3.1.13.** $(-1)^{(n-2)(n-1)/2}$. **3.1.14.** 1. **3.1.15.** 1.

3.1.17. 0. **3.1.18.** 0. **3.1.19.** 16.

3.1.21. n.

3.1.22. Si l'on pose

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

le nombre de termes non nuls du déterminant d'ordre n de la forme donnée est

$$\frac{r_2-1}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{1-r_1}{r_2-r_1}r_2^n.$$

3.1.23. 2^{n-1}.
3.1.24. $(-1)^n(t^n-a_1a_2\ldots a_n)$.
3.1.25. $t^n+a_nt^{n-1}+a_{n-1}t^{n-2}+\ldots+a_2t+a_1$.
3.1.26. n. **3.1.27.** n.
3.1.29. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

doit être nul.

3.1.30. Le terme constant est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.1.31. Le déterminant obtenu est un nombre complexe conjugué du déterminant initial.

3.1.32. Le déterminant est multiplié par $(-1)^n$. **3.1.33.** Le déterminant est multiplié par α^n. **3.1.34.** Le déterminant ne change pas.

3.1.38. Le déterminant est multiplié par $(-1)^{n(n-1)/2}$. L'élément de la case (i, j) du déterminant transformé est l'élément $a_{n+1-i,\,j}$ du déterminant initial.

3.1.39. $a_{n+1-i,\,n+1-j}$.
3.1.40. Le déterminant ne change pas.
3.1.41. $a_{n+1-j,\,n+1-i}$.
3.1.42. Le déterminant ne change pas.
3.1.43. Le déterminant est multiplié par $(-1)^{n(n-1)/2}$.
3.1.44. Les racines de l'équation sont les nombres -2, -1, 1, 2.
3.1.45. Les racines de l'équation sont les nombres 0 et -1.
3.1.46. x_1y_1 pour $n=1$; 0 pour $n>1$. **3.1.47.** 1 pour $n=1$; -2 pour $n=2$; 0 pour $n>2$.

3.1.48. Les polynômes $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ sont linéairement dépendants. Soit, pour fixer les idées, $f_n(t)=\alpha_1f_1(t)+\ldots+\alpha_{n-1}f_{n-1}(t)$. Alors, pour tout nombre a, $f_n(a)=\alpha_1f_1(a)+\ldots+\alpha_{n-1}f_{n-1}(a)$. C'est pourquoi dans le déterminant donné, les lignes sont linéairement dépendantes.

3.1.49. a) Le déterminant ne change pas; b) le déterminant s'annule.
3.1.51. $1+x_1y_1$ pour $n=1$; $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ pour $n=2$; 0 pour $n>2$.
3.1.52. $\cos(\alpha_1-\beta_1)$ pour $n=1$; $\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)$ pour $n=2$; 0 pour $n>2$.
3.1.53. $1+x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.
3.1.54. $1-2(\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2)=-1$.
3.1.57. Le permanent de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 bien que ses lignes soient linéairement dépendantes. En même temps, le permanent de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aux lignes linéairement indépendantes est nul.

3.2.1. a) C_n^k; b) $(C_n^k)^2$. **3.2.3.** C_n^k.

3.2.4. Soit p_i la somme de tous les mineurs principaux d'ordre i du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Alors, $f(t)=t^n+p_1t^{n-1}+\dots+p_{n-1}t+p_n$.

3.2.5. $k+1$.

3.2.8. Si D est d'ordre impair, D' est symétrique; si D est d'ordre pair, D' est antisymétrique.

3.2.9. Soit $i>j$. Alors, dans les premières j lignes du mineur M_{ij} complémentaire de l'élément a_{ij} se trouve la sous-matrice, composée seulement de zéros, qui compte $n-j$ colonnes. Puisque $j+(n-j)=n>n-1$, d'après 3.1.20, $M_{ij}=0$.

3.2.10. $D'=D^{n-1}$.

3.2.11. a) la i-ième ligne de D' ne change pas, toutes les autres sont multipliées par α. Le déterminant D' tout entier est multiplié par α^{n-1}; b) dans D' on commute les i-ième et j-ième lignes, après quoi toutes les lignes sont multipliées par (-1). Par là même le changement général du déterminant consiste à multiplier par $(-1)^{n+1}$; c) toutes les lignes de D', sauf la i-ième, ne changent pas; des éléments de la i-ième ligne on retranche les éléments correspondants de la j-ième ligne multipliés par α. Le déterminant D' ne change pas; d) D' est transposé.

3.2.16. 216. **3.2.17.** -106. **3.2.18.** 1. **3.2.19.** 120. **3.2.20.** -11. **3.2.21.** -2. **3.2.22.** -13. **3.2.23.** 1. **3.2.24.** 15. **3.2.25.** 3. **3.2.26.** 7.

3.2.28. -12. **3.2.29.** 16. **3.2.30.** 1. **3.2.31.** -400. **3.2.32.** -36. **3.2.33.** 0. **3.2.34.** 8. **3.2.35.** -1.

3.2.37. $\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$. **3.2.38.** $4^{n+1}-3^{n+1}$. **3.2.39.** $2^{n+1}-1$. **3.2.40.** 5^n. **3.2.41.** $\frac{i^n}{2}[1+(-1)^n]$. **3.2.42.** $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$. **3.2.43.** $1+n$. **3.2.44.** $6^n(1+n)$. **3.2.46.** $f_{n+1}(\lambda)=(\lambda-a_{i+1})f_i(\lambda)-b_{i+1}c_{i+1}f_{i-1}(\lambda)$.

3.3.2. Cette propriété est celle de tout volume orienté d'un parallélépipède dans tout espace euclidien ou unitaire.

3.3.5. a) résulte de l'inégalité d'Hadamard; b) soit ε la racine n-ième de l'unité : $\varepsilon=\cos 2\pi/n+i\sin 2\pi/n$. Alors, l'estimation donnée par a) s'obtient sur le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix};$$

c) pour $n=2$ l'estimation s'obtient sur le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supposons que pour $n=2^k$ l'estimation s'obtienne sur le déterminant de la matrice A_n; alors, pour $m=2^{k+1}$, il faut prendre le déterminant de la matrice d'ordre $2n$ suivante

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} A_n & -A_n \\ A_n & A_n \end{pmatrix}.$$

3.3.6. Si dans le déterminant donné d_n pour un certain couple d'indices i, j l'élément a_{ij} est inférieur à l'unité en module, alors, si $A_{ij}>0$, on augmente d_n en remplaçant a_{ij} par 1, et si $A_{ij}<0$, en remplaçant a_{ij} par -1. Enfin, pour $A_{ij}=0$, si on remplace a_{ij} par l'une quelconque de ces valeurs, le déterminant ne change pas. Un raisonnement analogue sur le minimum d'un déterminant montre qu'un des déterminants d'ordre donné à valeur maximale en module est le déterminant composé de 1 et de -1.

3.3.7. Pour démontrer l'inégalité $h_{k-1}\leq h_n$, il suffit de border de la façon suivante le déterminant d_{n-1} d'ordre $n-1$ composé de 0 et de 1 et égal en module à h_{n-1} :

$$d=\left|\begin{array}{c|c} d_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array}\right|,$$

pour obtenir le déterminant d'ordre n composé également de 0 et de 1, égal en module à h_{n-1}.

Pour démontrer l'inégalité $h_n\leq g_{n-1}$, prenons le déterminant extrémal d_n composé de 0 et de 1; commutons ses lignes de façon que dans la case (1, 1) se trouve l'unité et obtenons en retranchant des lignes qui suivent pour que tous les autres éléments de la première colonne soient des zéros. Alors, dans les dernières ligne et colonne on obtient le déterminant d'ordre $n-1$ composé de 0, 1, -1, égal en module à h_n. D'après 3.3.6, le module d'un tel déterminant ne dépasse pas g_{n-1}.

Pour démontrer l'inégalité $g_{n-1}\leq g_n$, il suffit de border le déterminant extrémal $\tilde{d}_{n-1}$ composé de 1 et de -1 de même que dans la démonstration de la première inégalité, puis appliquer 3.3.6.

Pour démontrer la dernière inégalité, prenons le déterminant extrémal $\tilde{d}_n$ composé de 1 et -1. En multipliant, si nécessaire, ses lignes et ses colonnes par -1, obtenons que tous les éléments de la première ligne soient égaux à 1, alors que tous les éléments de la première colonne, à partir du deuxième élément, soient égaux à -1. En ajoutant maintenant la première ligne à toutes les autres, on obtient dans les dernières ligne et colonne le déterminant d'ordre $n-1$ composé de 0 et de 2 et égal en module à g_n. En éliminant 2 de chaque ligne, nous découvrons que ce déterminant est le produit de 2^{n-1} par un certain déterminant d'ordre $n-1$ composé de 0 et de 1, d'où l'on déduit l'inégalité nécessaire.

3.3.8. D'aprés 3.3.7, $h_3\leq g_2=2$. Le fait que $h_3=2$ résulte, par exemple, du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puisqu'il est évident que $h_2=1$, d'après 3.3.7, $g_3\leq 4$. Comme $g_3\geq g_2=2$ et g_3 est le multiple de quatre, on a $g_3=4$.

3.3.9. Soit $\tilde{d}_{n-1}$ le déterminant extrémal d'ordre $n-1$ composé de 1 et de -1. Désignons les colonnes de ce déterminant par $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ et composons le déterminant suivant d'ordre n composé également de 1 et de -1 :

$$d=\left|\begin{array}{c|c} a_1 \quad a_2 \dots a_{n-1} & a_1 \\ \hline -1 \quad 1 \dots 1 & 1 \end{array}\right|.$$

Parmi les mineurs d'ordre $n-1$ qui se trouvent dans les premières $n-1$ lignes du déterminant, deux seulement diffèrent de zéro; c'est pourquoi en décomposant suivant la dernière ligne on obtient $d=2d_{n-1}$.

3.3.10. D'après 3.3.5, 3.3.7 et 3.3.9, g_5 est multiple de 16 et $g_5 \geq 2g_4 = 32$. D'autre part, d'après l'inégalité d'Hadamard,

$$g_5 \leq (\sqrt{5})^5 = 25\sqrt{5} < 64.$$

Par conséquent, g_5 est égal soit à 32, soit à 48. La méthode qui consiste à border le déterminant d'ordre 4 donnée dans la solution du problème 3.3.9 ne permet d'obtenir pour le déterminant d'ordre 5 que la valeur 32. C'est pourquoi bordons le déterminant d'une autre façon :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant vaut 48. Ainsi, $g_5 = 48$.

3.3.11. Admettons que $M = 1$. Bordons le déterminant d d'ordre n de la façon suivante :

$$\tilde{d} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \\ 0 & \\ \vdots & d \\ 0 & \end{vmatrix}.$$

Il est évident que le déterminant obtenu $\tilde{d}$ d'ordre $n+1$ est égal à $d/2$. Retranchons maintenant la première ligne de $\tilde{d}$ de toutes les autres lignes. Alors tous les éléments du déterminant ne dépassent pas en module 1/2, et d'après 3.3.5, a),

$$d/2 \leq (1/2)^{n+1} \cdot (n+1)^{(n+1)/2},$$

ce qu'il fallait obtenir.

3.3.13. a) le déterminant $G(x_1, \ldots, x_k)$ est de la forme diagonale et vaut $|x_1|^2 \cdot |x_2|^2 \ldots |x_k|^2$; b) le déterminant $G(x_1, \ldots, x_k)$ est de la forme « quasi diagonale » et vaut $G(x_1, \ldots, x_l) \cdot G(x_{l+1}, \ldots, x_k)$.

3.3.14. a) le déterminant ne change pas; b) le déterminant est multiplié par $|\alpha|^2$; c) le déterminant ne change pas.

3.3.20. D'après 3.3.18, $G^{1/2}(a_1, \ldots, a_n)$ est le volume de parallélépipède tendu sur les vecteurs $a_1, \ldots, a_n$; le sens du module de det A est le même.

3.3.25. Le déterminant de Gram ne dépasse pas le produit de deux de ses mineurs réciproquement complémentaires et lui est égal si et seulement si au moins l'un de ces mineurs est nul ou bien tous les éléments hors de ces mineurs sont nuls.

3.3.27. Pour $k = 3$, l'inégalité devient

$$V^2(x_1, x_2, x_3) \leq S(x_1, x_2)\, S(x_1, x_3)\, S(x_2, x_3).$$

Ainsi, le carré du volume du parallélépipède tendu sur les vecteurs x_1, x_2, x_3 ne dépasse pas le produit des aires de ses faces.

3.3.29. Si tous les éléments d'une certaine ligne du déterminant orthogonal sont remplacés par des nombres ε_j, $j = 1, \ldots, n$, tels que $\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j|^2 < 1$, alors le déterminant obtenu vérifie les inégalités

$$1 - |\varepsilon| \leq |d'| \leq |1 + |\varepsilon||.$$

3.3.30. Le module du mineur à l'intersection des lignes d'indices $i_1, \ldots, i_k$ et des colonnes d'indices $j_1, \ldots, j_k$ est un volume de parallélépipède obtenu par la projection des lignes considérées sur le sous-espace de coordonnées des vecteurs $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base naturelle de l'espace arithmétique.

3.3.32. Si on adopte que la base du parallélépipède Π_n de dimension n correspondant est le parallélépipède Π_{n-1} de dimension $n-1$ tendu sur les premières $n-1$ lignes, alors l'indice de Π_n est très faible, le volume de la base Π_{n-1} étant très grand.

3.4.2. $a_{pp}^{(p-1)}=\dfrac{A(1, \ldots, p)}{A(1, \ldots, p-1)}$.

3.4.6. $a_{pj}^{(p-1)}=\dfrac{A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\,p\\ 1\ldots p-1\,j\end{pmatrix}}{A(1, \ldots, p-1)}, \quad p\leq j\leq n.$

3.4.10. 4. **3.4.11.** $-16i$. **3.4.12.** -12. **3.4.13.** 5. **3.4.14.** 0. **3.4.15.** 80. **3.4.16.** 3. **3.4.17.** $2^{-9}\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-4}\cdot 7^{-2}$. **3.4.18.** 240. **3.4.19.** $-1/2$. **3.4.20.** $-18\,016$. **3.4.21.** 2. **3.4.22.** -1. **3.4.23.** 5. **3.4.24.** 16. **3.4.25.** 63. **3.4.26.** 32. **3.4.27.** 1. **3.4.28.** 13.

3.4.29. Ce nombre est un polynôme de n dont le terme de degré le plus élevé est $n^3/3$.

3.4.30. a) Le terme de degré le plus élevé du nombre d'opérations est $n^2/2$; b) le terme de degré le plus élevé est $3n$.

3.4.31. Le calcul du déterminant d_{n+1} doit se faire de façon que d_n reste mineur principal directeur dans d_{n+1}. La construction du déterminant de la matrice triangulaire doit débuter d'en haut.

3.4.32. La condition de non-dégénérescence permet, en appliquant seulement des commutations des lignes, d'obtenir l'inégalité à zéro de tous les mineurs principaux directeurs; des commutations des $n-1$ premières colonnes sont également admissibles. Ensuite on applique la méthode de Gauss qui comporte les dernières colonnes de tous les k déterminants.

3.4.33. Par exemple, placer la première ligne à la dernière place et faire de même pour la première colonne.

3.4.36. Par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 1 \\ -1 & 1 & 0 \ldots 1 \\ -1 & -1 & 1 \ldots 1 \\ . & . & . \ldots . \\ -1 & -1 & -1 \ldots 1 \end{vmatrix}.$$

3.4.38. Pour la méthode de Gauss à pivot choisi suivant une colonne, la proposition n'est pas vraie; un exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 1 & 2000 \end{vmatrix}.$$

3.4.39. Admettons que $\max\limits_{i,j} |a_{ij}|=1$. Désignons : $\alpha=|a_{22}^{(1)}|$, $\beta=|a_{33}^{(2)}|$. Alors, $\beta\leq 2\alpha$, $\alpha\beta\leq 4$, d'où $\beta\leq 2\sqrt{2}<3$.

3.4.42. Le déterminant est égal à 1 et la longueur de chacune de ses lignes vaut 1; d'après 3.3.4, les lignes d'un déterminant sont orthogonales deux à deux.

3.4.43. a) $2^n\cdot(\det A)^2$; b) 0; c) $(\det A)^2$; d) $(-1)^n\cdot(\det A)^2$.

4.1.4. Tous les éléments de la matrice ne faisant pas partie du mineur de base sont des zéros.

4.1.5. Cf. réponse du problème 4.1.4.

4.1.14. Si $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n$ est une collection de nombres convenable, pour tout nombre α, $\alpha\neq 0$, convient également la collection $\alpha b_1, \ldots, \alpha b_m, \dfrac{1}{\alpha} c_1, \ldots, \dfrac{1}{\alpha} c_n$.

4.1.17. Non. Un contre-exemple :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4.1.18. Ou bien le rang ne change pas, ou bien il change de l'unité.

4.1.19. Le rang ne change pas plus que de l'unité; le rang ne change pas plus que de k.

4.1.21. 0, 1, 2.

4.1.28. 1. **4.1.29.** 4. **4.1.30.** 3. **4.1.31.** 3. **4.1.32.** 4. **4.1.33.** 4.

4.1.34. La dimension vaut trois.

4.1.35. a) Oui; b) oui; c) non.

4.2.7. Un tel plan se compose d'un seul vecteur.

4.2.8. Un tel plan coïncide avec l'espace tout entier.

4.2.9. n.

4.2.12. Si $x_0, x_1, \ldots, x_k$ est le système de vecteurs donné, on peut prendre comme vecteur de translation du plan recherché x_0, et comme espace directeur, l'enveloppe linéaire des vecteurs $x_1-x_0, \ldots, x_k-x_0$.

4.2.15. L_1+L_2.

4.2.16. L, si $\lambda\neq 0$; O, si $\lambda=0$.

4.2.17. Oui, si $L=O$; dans ce cas, M coïncide avec V. Non, si $L\neq O$, étant donné que la multiplication par un nombre, comme elle est définie dans 4.2.16, fait sortir des limites de M.

4.2.18. Conserver la définition de la multiplication par un nombre pour les nombres λ différents de zéro. Pour tout plan $P=x_0+L$ poser $O\cdot P=L$. Alors L est l'élément nul de l'espace M.

4.2.19. $\dim M=n-k$.

4.2.20. Le plan indiqué contient le vecteur z, mais ne contient pas le vecteur v.

4.2.22. a) La droite ne coupe pas le plan; b) la droite possède avec le plan un seul vecteur commun $z_0=(2, 1, -2, 2)$; c) la droite appartient au plan.

4.2.23. Les droites possèdent un vecteur commun $z_0=(-5, 11, -16, -11, 7)$. Le plan qui passe par ce vecteur et dont le sous-espace directeur est l'enveloppe linéaire des vecteurs q_1 et q_2 contient les deux droites données.

4.2.24. Mener le plan par x_1 parallèlement à l'enveloppe linéaire des vecteurs x_2-x_1, q_1, q_2.

4.2.25. Les plans ont un vecteur commun unique $z_0=(1, 2, 1, 0, 1)$.

4.2.26. Les plans ne se coupent pas. De plus, leurs sous-espaces directeurs ne se coupent que suivant le vecteur nul.

4.2.27. Les plans ne se coupent pas. De plus, leurs sous-espaces directeurs se coupent suivant un sous-espace unidimensionnel tendu sur le vecteur $2p_1+p_2=q_2-q_1=(5, 1, 0, 0, 5)$.

4.2.28. Les plans se coupent suivant la droite $x=z_0+q_2t$, où $z_0=(-2, -1, 6, 6, 7)$.

4.2.29. Les plans ne se coupent pas. De plus, ils possèdent le même sous-espace directeur.

4.2.30. Les plans se confondent.

4.2.34. Soient $P=x_0+L_k$ et $e_1, \ldots, e_k$ la base de L_k. Complétons-la jusqu'à la base de l'espace tout entier : $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Alors on peut adopter comme hyperplans recherchés

$$\pi_1=x_0+L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$\pi_2=x_0+L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pi_{n-k}=x_0+L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}).$$

4.3.1. Si x_0 est un vecteur arbitraire vérifiant la conditon $(n, x_0)=b$ (comme x_0 on peut prendre, par exemple, le vecteur $\alpha_0 n$, $\alpha_0=b/(n, n)$), alors l'ensemble donné est un hyperplan des vecteurs de la forme x_0+y, où y est un vecteur quelconque orthogonal à n. Cet hyperplan est un sous-espace si et seulement si $b=0$.

4.3.5. $n(t)=1+ct+c^2t^2+\ldots+c^nt^n$, $b=d$.

4.3.8. Soit x_0 un vecteur d'intersection arbitraire. Mettons les équations des hyperplans sous la forme

$$(n_1, x-x_0)=0,$$
$$(n_2, x-x_0)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n_k, x-x_0)=0.$$

Ceci montre que l'intersection des hyperplans donnés est le plan $P=x_0+L$, où L est le supplémentaire orthogonal à l'enveloppe linéaire des vecteurs $n_1, \ldots, n_k$.

4.3.10. Le supplémentaire orthogonal à L est tendu sur les vecteurs $z_1=(-3, 1, -2, 0)$; $z_2=(1, -1, -2, 1)$ (cf. 2.3.6). C'est pourquoi P peut être décrit, par exemple, par le système d'équations

$$(z_1, x)=(z_1, x_0),$$
$$(z_2, x)=(z_2, x_0),$$

c'est-à-dire

$$-3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 \qquad =-4,$$
$$\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=-1.$$

4.3.14. $z_0=\alpha_0 n$, où $\alpha_0=b/(n, n)$.

4.3.16. $f(t)\equiv 1$.

4.3.19. 5.

4.3.22. 2. **4.3.23.** 2.

4.3.24. 150. **4.3.25.** 5. **4.3.26.** 5.

4.4.4. 0, 7.

4.4.5. Pour $\lambda\neq 1, 2$, le système admet une seule solution; pour $\lambda=1$, le sous-espace des solutions est unidimensionnel, et pour $\lambda=2$, le sous-espace des solutions est bidimensionnel.

4.4.6. Pour $\lambda\neq -1, -2$, le système admet une seule solution; pour $\lambda=-1$, le sous-espace des solutions est unidimensionnel, et pour $\lambda=-2$, le sous-espace des solutions est tridimensionnel.

4.4.8. Les pivots sont égaux aux rapports des mineurs situés dans les premières ligne et colonne et dans les dernières ligne et colonne.

4.4.10. La dépendance linéaire des vecteurs $y_1, \ldots, y_k$ conduit d'une façon évidente à la dépendance linéaire des vecteurs $z_1, \ldots, z_k$. Supposons maintenant, inversement que dans l'égalité $\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_k z_k=0$ il existe des coefficients différents de zéro. Alors deux solutions du système (4.4.1), la solution nulle et $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_k y_k$, admettent que les dernières $n-r$ composantes aient les mêmes valeurs; par conséquent, $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_k y_k=0$, c'est-à-dire les vecteurs $y_1, \ldots, y_k$ sont linéairement dépendants.

4.4.14. Pour réaliser la méthode de Gauss et obtenir par la suite des formules de la solution générale, on effectue avec les lignes de la sous-matrice donnée seulement des transformations élémentaires. Le résultat final est la matrice C [les lignes nulles de la $(r+1)$-ième à la m-ième sont rejetées].

4.4.16. Tout vecteur de l'espace arithmétique de dimension 4 est une solution du système.

4.4.17. Par exemple, la solution générale $x_1=-\frac{7}{3}x_3+\frac{5}{3}x_3$, $x_4=0$. Le système fondamental de solutions : $y_1=(-7, 3, 0, 0)$; $y_2=(5, 0, 3, 0)$.

4.4.18. Solution générale : $x_3=2x_1+5x_2-9x_4$. Le système fondamental de solutions : $y_1=(1, 0, 2, 0)$; $y_2=(0, 1, 5, 0)$; $y_3=(0, 0, -9, 1)$.

4.4.19. Le système ne possède qu'une solution nulle.

4.4.20. Solution générale : $x_1=x_4$; $x_2=x_4$; $x_3=-x_4$. Le système fondamental de solutions se compose d'un seul vecteur, par exemple, de $y=(1, 1, -1, 1)$.

4.4.21. Solution générale : $x_1=2x_3+8x_4$; $x_2=-x_3-2x_4$; $x_5=0$. Système fondamental de solutions : $y_1=(2, -1, 1, 0, 0)$; $y_2=(8, -2, 0, 1, 0)$.

4.4.22. Solution générale : $x_1=-\frac{1}{2}x_3-12x_4-\frac{41}{2}x_5$; $x_2=x_3-9x_4-18x_5$. Système fondamental de solutions : $y_1=(-1, 2, 2, 0, 0)$; $y_2=(12, 9, 0, -1, 0)$; $y_3=(41, 36, 0, 0, -2)$.

4.4.23. Solution générale : $x_1=x_2=\frac{1}{7}x_5$; $x_3=x_4=-\frac{3}{7}x_5$. Le système fondamental de solutions se compose d'un seul vecteur, par exemple, $y=(1, 1, -3, -3, 7)$.

4.4.24. Solution générale : $x_1=-\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_5$; $x_2=-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_5$; $x_4=0$. Système fondamental de solutions : $y_1=(2, 9, -6, 0, 0)$; $y_2=(-2, 3, 0, 0, 6)$.

4.4.25. Solution générale : $x_1=-x_2=x_3=-x_4+3x_5$. Système fondamental de solutions : $y_1=(-1, 1, -1, 1, 0)$; $y_2=(3, -3, 3, 0, 1)$.

4.4.26. Les trois premières colonnes de la matrice sont linéairement dépendantes; la quatrième colonne n'est pas exprimée linéairement par les autres, il s'ensuit que $x_4=0$; ceci est également vrai pour la cinquième colonne; donc, $x_5=0$.

4.4.27. x_4, x_5; x_1, x_4; x_3, x_4; x_2, x_5; x_1, x_2; x_2, x_3.

4.4.28. $n+1-k$.

4.4.29. La base du sous-espace est formée, par exemple, de polynômes $f_1(t)=t^4-6t^3+11t^2-6t$ et $f_2(t)=t^5-25t^3+60t^2-36t$.

4.4.30. a) Par exemple,

$$70x_1-16x_2+4x_3+x_4=0,$$
$$-5x_1+x_2-x_3+x_5=0.$$

Pour obtenir la réponse à b) et c) il faut ajouter à a) une (deux) combinaison linéaire quelconque des équations a).

4.4.31. Non. Les systèmes donnés ne sont pas équivalents.

4.4.33. $(44, -11, -31, -6)$.

4.5.6. Pour $\lambda\neq 0,6$, le système est défini; pour $\lambda=0$, il est incompatible; pour $\lambda=6$, le système admet un plan des solutions bidimensionnel.

4.5.7. Pour $\lambda\neq -1, 2$, le système est défini; pour $\lambda=2$, il est incompatible; pour $\lambda=-1$, le système admet un plan des solutions bidimensionnel.

4.5.12. Par exemple, la solution générale : $x_1=\frac{45}{19}+\frac{37}{19}x_2-\frac{23}{19}x_3-\frac{42}{19}x_4$.

4.5.13. Le système est incompatible.

4.5.14. Par exemple, la solution générale : $x_1=-1+x_3+2x_4$; $x_2=-3+x_3+2x_4$.

4.5.15. Le système possède une seule solution : $x_1=1$; $x_2=-1$, $x_3=-1$; $x_4=1$.

4.5.16. Solution générale : $x_1=6-x_5$; $x_2=-5+x_5$; $x_3=3$; $x_4=-1-x_5$.

4.5.17. Solution générale : $x_1=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x_2-\frac{39}{2}x_5$; $x_3=\frac{1}{3}+x_5$; $x_4=-\frac{2}{3}-2x_5$.

4.5.18. Solution générale : $x_1=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}x_2-\frac{11}{8}x_3+\frac{5}{8}x_4$; $x_5=0$.

4.5.19. Le système est incompatible.

4.5.20. Le système possède une seule solution : $x_1=x_2=x_3=x_4=1$; $x_5=2$.

4.5.21. Solution générale : $x_1=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2$; $x_3=x_4=0$; $x_5=\frac{11}{5}-\frac{6}{5}x_6$.

4.5.22. Le système est incompatible.

4.5.23. Pour $\lambda\neq 5$, le système est incompatible. Pour $\lambda=5$, le système est compatible et sa solution générale est, par exemple, $x_1=-4+x_3$; $x_2=\frac{11}{2}-2x_3$.

4.5.24. Pour $\lambda\neq -3$, le système admet une seule solution :

$$x_1=-\frac{1}{\lambda+3},\quad x_2=\frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)},\quad x_3=-\frac{\lambda+11}{3(\lambda+3)}.$$

Pour $\lambda=-3$, le système est incompatible.

4.5.25. Le système est compatible quelle que soit la valeur de λ. Pour $\lambda \neq -95$, la solution générale est de la forme : $x_2=0$, $x_1=\frac{13}{12}-\frac{23}{12}x_3$. Pour $\lambda=-95$ la solution générale est : $x_1=\frac{13}{12}+\frac{19}{12}x_2-\frac{23}{12}x_3$.

4.5.26. Pour $\lambda \neq 1, -2$, le système admet une seule solution :

$$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{\lambda+2}.$$

Pour $\lambda=1$, la solution générale est : $x_1=1-x_2-x_3$. Pour $\lambda=-2$, le système est incompatible.

4.5.27. Pour $\lambda \neq 1, -2$, le système admet une seule solution :

$$x_1=x_2=-\frac{1}{\lambda-1}, \quad x_3=\frac{2}{\lambda-1}.$$

Pour $\lambda=1$, le système est incompatible. Pour $\lambda=-2$, le système est compatible et sa solution générale est : $x_1=x_2=-1+x_3$.

4.5.28. Pour $\lambda \neq 1, -2$, le système admet une seule solution :

$$x_1=x_2=-\frac{3}{(\lambda-1)(\lambda+2)}, \quad x_3=\frac{3(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+2)}.$$

Pour $\lambda=1$ et $\lambda=-2$, le système est incompatible.

4.5.29. Pour $\lambda \neq 1, 3$, le système admet une seule solution :

$$x_1=-1, \quad x_2=\frac{\lambda-4}{\lambda-3}, \quad x_3=-\frac{1}{\lambda-3}.$$

Pour $\lambda=1$, la solution générale est : $x_1=1-x_2-x_3$. Pour $\lambda=3$, le système est incompatible.

4.5.30. Pour $\lambda \neq 1, 3$, le système admet une seule solution :

$$x_1=\frac{2}{3-\lambda}, \quad x_2=x_3=0, \quad x_4=\frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}.$$

Pour $\lambda=1$, le système est incompatible. Pour $\lambda=3$, la solution générale est :

$$x_1=-\frac{17}{9}-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{9}x_4, \quad x_2=2.$$

4.5.31. La troisième colonne de la matrice du système ne s'exprime pas linéairement par les autres colonnes; la cinquième colonne ne s'exprime pas linéairement par les autres colonnes de la matrice complète du système.

4.5.32. Non. Les formules ne sont pas équivalentes.

4.5.33. Oui.

4.5.34. $n+1-k$.

4.5.35. Les conditions données déterminent un plan bidimensionnel. Si $f_0(t)$ est un polynôme quelconque de ce plan, les polynômes $f_0(t)$, $f_0(t)+f_1(t)$, $f_0(t)+f_2(t)$, où $f_1(t)$ et $f_2(t)$ constituent la base du sous-espace directeur, sont linéairement indépendants. Comme $f_1(t)$ et $f_2(t)$ on peut prendre les polynômes du problème 4.4.29.

4.5.36. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=3$.

4.5.40. $x_1=\frac{ap-bq-cr-ds}{A}$, $x_2=\frac{bp+aq-dr+cs}{A}$, $x_3=\frac{cp+dq+ar-bs}{A}$, $x_4=\frac{dp-cq+br+as}{A}$.

4.5.42. $f(t)=t^3-4t^2+3t-2$.
4.5.43. $f(t)=-3t^3+7t$.
4.5.47. $f(t)=t^4-4t^2+3t-1$.
4.5.49. $f(t)=2t^4-t^3-3t^2-2t+1$.
4.5.51. $f(t)=2t^5-4t^4-3t^2+5t-2$.
4.5.53. Ecrivons pour la fonction f et ses dérivées le système d'équations :

$$\begin{array}{ll} hf & =g, \\ h'f+hf' & =g', \\ h^{(2)}f+2h'f'+hf^{(2)} & =g^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ h^{(n)}f+nh^{(n-1)}f'+C_n^2h^{(n-2)}f^{(2)}+\dots+hf^{(n)}=g^{(n)}. & \end{array}$$

En utilisant la formule de Cramer pour $f^{(n)}$ calculons la relation nécessaire.
4.5.54. $f^{(5)}(1)=-2$.

5.1.1. Oui, si $a=0$; non, si $a\neq 0$. **5.1.2.** Cf. réponse à 5.1.1. **5.1.3.** Oui. **5.1.4.** Oui. **5.1.5.** Oui. **5.1.6.** Non. **5.1.7.** Oui. **5.1.8.** Oui.
5.1.9. Oui, si $\alpha=0$; non, si $\alpha\neq 0$. **5.1.10.** Oui. **5.1.11.** Non. **5.1.12.** Non. **5.1.13.** Oui. **5.1.14.** Non.
5.1.15. Non. **5.1.16.** Oui. **5.1.17.** Non. **5.1.18.** Oui.
5.1.19. Oui. **5.1.20.** Oui. **5.1.21.** Oui. **5.1.22.** Oui. **5.1.23.** Oui. **5.1.24.** Oui. **5.1.25.** Non. **5.1.26.** Non. **5.1.27.** Non.
5.1.34. Tout opérateur de l'espace R^+ consiste à élever tous les nombres de cet espace à la puissance à exposant réel fixé (pour l'opérateur donné).
5.1.36. Non. **5.1.37.** Oui.
5.1.40. a) Oui; b) non.
5.1.44. Non, si le système $x_1, \dots, x_k$ est linéairement dépendant.
5.1.45. Oui.
5.1.47. Pour que la fonctionnelle linéaire φ de l'espace M_n puisse être donnée par la formule $\varphi f(t)=f(a_0)$, il faut et il suffit que les nombres

$$c_i=\varphi(t^i), \quad i=0, 1, \dots, n,$$

vérifient les relations

$$c_0=1, \quad \frac{c_{i+1}}{c_i}=\text{const}, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

5.1.52. Non. Tout opérateur de l'espace C obtenu de cette façon associe les vecteurs « réels » (c'est-à-dire les vecteurs de la forme $x+i0$) encore aux vecteurs réels.
5.1.53. Non, si cette fonctionnelle n'est pas identiquement nulle.
5.1.55. Oui, si $\dim Y\geq\dim X$; non, si $\dim Y<\dim X$.
5.1.56. Non, si $\dim Y>\dim X$; oui, si $\dim Y\leq\dim X$.
5.1.59. N_A; 0.
5.1.66. n, si $f=0$; $n-1$, si $f\neq 0$.
5.1.67. Le sous-espace bidimensionnel des vecteurs orthogonaux à a; le sous-espace bidimensionnel des vecteurs coplanaires à a et b.
5.1.68. N_A est une droite tendue sur le vecteur a; T_A est un plan perpendiculaire au vecteur a.
5.1.69. Si $(a, b)=0$, N_A est un plan perpendiculaire au vecteur a; T_A est une droite tendue sur le vecteur b. Mais si $(a, b)\neq 0$, alors N_A est une droite tendue sur le vecteur b; T_A, un plan perpendiculaire au vecteur a.
5.1.70. $r_A=1$, la base de l'image : $y=(1, 1, 1)$; $n_A=2$, la base du noyau : $Z_1= =(1, -1, 0)$, $Z_2r=(1, 0, -1)$.
5.1.71. $r_A=2$, la base de l'image : $y_1=(2, 1, 1)$; $y_2=(-1, -2, 1)$; $n_A=1$, la base du noyau : $Z=(1, 1, 1)$.

5.1.72. $r_A=3$; $n_A=0$.

5.1.73. L'image : M_{n-1}; le noyau : M_0.

5.1.74. Cf. réponse à 5.1.73.

5.1.75. $n+1-k$, si $k<n+1$; 0, si $k\geq n+1$.

5.1.76. $N_P=L_2$; $T_P=L_1$.

5.2.7. Soit $e_1, \dots, e_n$ une certaine base de l'espace X et supposons que pour l'opérateur A de ω_{XY}

$$Ae_1=a_{11}q_1+a_{21}q_2+\dots+a_{m1}q_m,$$
$$Ae_2=a_{12}q_1+a_{22}q_2+\dots+a_{m2}q_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Ae_n=a_{1n}q_1+a_{2n}q_2+\dots+a_{mn}q_m.$$

Adoptons

$$B_1e_1=a_{11}q_1, \quad B_2e_1=a_{21}q_2, \quad \dots, \quad B_me_1=a_{m1}q_m,$$
$$B_1e_2=a_{12}q_1, \quad B_2e_2=a_{22}q_2, \quad \dots, \quad B_me_2=a_{m2}q_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B_1e_n=a_{1n}q_1, \quad B_2e_n=a_{2n}q_2, \quad \dots, \quad B_me_n=a_{mn}q_m.$$

Il est évident que les opérateurs B_i, $i=1, \dots, m$, satisfont aux conditions du problème.

5.2.11. $\dim \omega_{XY}=mn$.

5.2.12. a) Non, si $T\neq 0$; b) non, si $N\neq X$.

5.2.13. $\dim \omega_{XT}=kn$.

5.2.14. $\dim K_N=m(n-l)$.

5.2.20. Soient $e_1, \dots, e_d$ $(d=n-r)$ une base quelconque de N_A; $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots$ $\dots, e_n$ une base de X. Alors, les vecteurs $y_1=Ae_{d+1}, \dots, y_r=Ae_n$ constituent une base de T_A. La représentation recherchée de l'opérateur A est donnée par les opérateurs $B_1, \dots, B_r$, définis par les égalités

$$B_ie_k=\begin{cases} 0, & k\neq d+i, \\ y_i, & k=d+i. \end{cases}$$

5.2.21. Ou bien $N_A=N_B$, ou bien $T_A=T_B$.

5.2.22. Soient dans L tous les opérateurs de rang ≤ 1, et A, un opérateur arbitraire de rang 1 de L. Considérons dans L le sous-ensemble L_1 des opérateurs B tels que $N_B\supset N_A$, et le sous-ensemble L_2 des opérateurs C tels que $T_C\subset T_A$. D'après 5.2.13, 5.2.14, ces sous-ensembles sont des sous-espaces de L de dimension $\leq n$. Donc, $L_1\neq L$, $L_2\neq L$ et il existe un opérateur D de L tel que $D\notin L_1$, $D\notin L_2$, c'est-à-dire $T_D\neq T_A$, $N_D\neq N_A$. Mais alors (cf. 5.2.21), $A+D$ est de rang 2.

5.2.23. Non (cf. 5.2.8).

5.2.24. Oui.

5.2.26. $N_{E-P}=T_P$; $T_{E-P}=N_P$.

5.3.4. Non.

5.3.6. $n(n-r)$. **5.3.7.** $n(n-r)$. **5.3.8.** Le rang est égal à nr, le défaut est égal à $n(n-r)$.

5.3.10. Soit $x\in N_{q+k}$. Alors,

$$A^{q+k}x=0=A^{q+1}(A^{k-1}x).$$

Puisque $N_q=N_{q+1}$, on a

$$A^q(A^{k-1}x)=0=A^{q+k-1}x,$$

c'est-à-dire $x\in N_{q+k-1}$. Par conséquent, $N_{q+k}=N_{q+k-1}$. En poursuivant ainsi, on obtient

$$N_{q+k}=N_{q+k-1}=N_{q+k-2}=\dots=N_{q+1}=N_q.$$

5.3.12. $n+1$.

5.3.19. Si D est un opérateur de dérivation, on a

$$A=E+\frac{1}{1!}D+\frac{1}{2!}D^2+\dots+\frac{1}{n!}D^n.$$

5.3.21. Soient $\varphi(A)=0$ et $\varphi(t)=q(t)m(t)+r(t)$, où le degré de $r(t)$ est inférieur à celui de $m(t)$, ou bien $r(t)\equiv 0$. Si $r(t)$ est un polynôme non nul, alors $r(A)=\varphi(A)-q(A)m(A)=0$, ce qui contredit la définition du polynôme $m(t)$.

5.3.22. Soient $m_1(t)$ et $m_2(t)$ deux polynômes annulateurs de degré minimal. De plus, on peut considérer que les coefficients dominants des deux polynômes valent 1. Si $p(t)=$ $=m_1(t)-m_2(t)$ est un polynôme non nul, il annule également l'opérateur A.

5.3.23. a) $m(t)=t^2-t$, si $P\neq 0, E$; $m(t)=t$ pour $P=0$; $m(t)=t-1$ pour $P=E$; b) $m(t)=$ $=t^2-1$; c) $m(t)=t^q$.

5.3.25. Non.

5.3.31. Le fait que P_1P_2 est un opérateur de projection se déduit de l'égalité (cf. 5.3.17) :

$$(P_1P_2)^2=P_1P_2P_1P_2=P_1^2P_2^2=P_1P_2.$$

La commutabilité de P_1 et P_2 entraîne également que $T_{P_1P_2}\subset T_{P_1}\cap T_{P_2}$. Si, inversement, $x\in T_{P_1}\cap T_{P_2}$, alors, $P_1x=P_2x=x$ et $P_1P_2x=x$, c'est-à-dire $x\in T_{P_1P_2}$.

En utilisant encore la commutabilité de P_1 et P_2, on obtient que $N_{P_1}\subset N_{P_1P_2}$ et $N_{P_2}\subset$ $\subset N_{P_1P_2}$, c'est-à-dire $N_{P_1}+N_{P_2}\subset N_{P_1P_2}$. Supposons maintenant que $x\in N_{P_1P_2}$. Alors, $P_2x\in N_{P_1}$ et $(E-P_2)x\in N_{P_2}$. L'identité $x=P_2x+(E-P_2)x$ démontre l'inclusion inverse : $N_{P_1P_2}\subset N_{P_1}+N_{P_2}$.

5.3.32. On vérifie aisément que $P_1P_2=P_2P_1=0$ implique $(P_1+P_2)^2=P_1+P_2$, c'est-à-dire P_1+P_2 est un opérateur de projection. Supposons inversement que $(P_1+P_2)^2=$ $=P_1+P_2$, d'où

$$P_2P_1+P_1P_2=0.$$

En prémultipliant et en postmultipliant cette égalité par P_1, on obtient

$$P_1P_2P_1+P_1P_2=0,$$
$$P_2P_1+P_1P_2P_1=0,$$

ce qui donne

$$P_2P_1-P_1P_2=0$$

et par conséquent

$$P_1P_2=P_2P_1=0.$$

L'inclusion $T_{P_1+P_2}\subset T_{P_1}+T_{P_2}$ est évidente. La condition $P_1P_2=0$ entraîne que $T_{P_2}\subset N_{P_1}$. Comme la somme $T_{P_1}+N_{P_1}$ est directe, ceci est encore vrai pour la somme $T_{P_1}+T_{P_2}$. Soit, maintenant, $x\in T_{P_1}+T_{P_2}$, c'est-à-dire $x=x_1+x_2$, où $x_1\in T_{P_1}$; $x_2\in T_{P_2}$. Alors,

$$(P_1+P_2)x=(P_1+P_2)x_1+(P_1+P_2)x_2=$$
$$=(P_1+P_2)P_1x_1+(P_1+P_2)P_2x_2=P_1^2x_1+P_2^2x_2=x_1+x_2=x,$$

c'est-à-dire $T_{P_1}+T_{P_2}\subset T_{P_1+P_2}$.

Puisque $T_{P_1}\cap T_{P_2}=0$, on tire de $x\in N_{P_1+P_2}$, c'est-à-dire de $P_1x=-P_2x$, que $x\in N_{P_1}\cap N_{P_2}$.

5.3.38. L'opérateur qui à chaque fonction fait correspondre sa primitive (unique) appartenant à l'espace donné.

5.3.39. $R^{-1}=R$.

5.3.41. Dans le cas de dégénérescence des opérateurs $E+A$ et $E-A$, le noyau de chacun d'eux doit coïncider avec l'image de l'opérateur A. Mais pour le vecteur non nul x, l'observation simultanée des égalités $-Ax=x$ et $Ax=x$ est impossible.

5.3.51. Oui, si $\dim Y=\dim X$; non, si $\dim Y>\dim X$. Le cas $\dim Y<\dim X$ est impossible.

5.4.1. $AB=-1$, $\qquad BA=\begin{Vmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$

5.4.2. $AB=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $BA=\begin{Vmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{Vmatrix}$.

5.4.3. $AB=\begin{Vmatrix} -52 \\ 78 \\ 69 \end{Vmatrix}$.

5.4.4. $AB=(-15 \quad 97 \quad 78 \quad -112)$.

5.4.5. $AB=\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.6. $AB=(-1 \quad 0 \quad -1 \quad 4)$.

5.4.7. $AB=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.8. $ABC=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **5.4.9.** $ABCD=\begin{Vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{Vmatrix}$.

5.4.12. $X=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. **5.4.13.** $X=\begin{Vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$.

5.4.14. $X=\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$. **5.4.15.** $X=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.16. $X=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$. **5.4.17.** $X=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.19. mpn multiplications; $mp(n-1)$ additions.

5.4.20. Le produit $(AB)C$ demande $mp(n+q)$ multiplications; le produit $A(BC)$ demande $nq(m+p)$ multiplications.

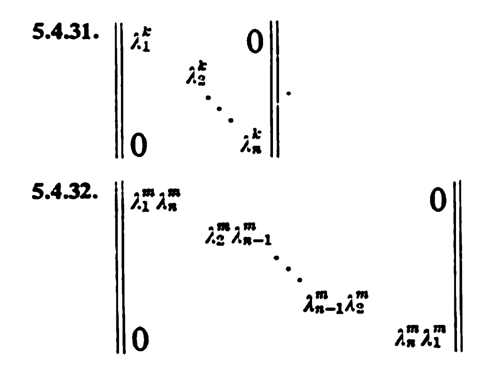
5.4.25. a) aux lignes de A on ajoute à partir de la $(i+1)$-ième ligne multipliée par $\alpha_{i+1,i}$, $\alpha_{i+2,i}$, ..., α_{ni} respectivement; b) à toutes les lignes de A sauf la i-ième ligne on ajoute la i-ième ligne multipliée par α_{1i}, ..., $\alpha_{i-1,i}$, $\alpha_{i+1,i}$, ..., α_{ni} respectivement.

Pour postmultiplier : a) à la i-ième colonne de A on ajoute chacune des colonnes qui suivent multipliée par le nombre α_{ki}, $k=i+1$, ..., n; b) à la i-ième colonne de A on ajoute chacune des colonnes qui suivent multipliée par le nombre correspondant α_{ki}, $k\neq i$.

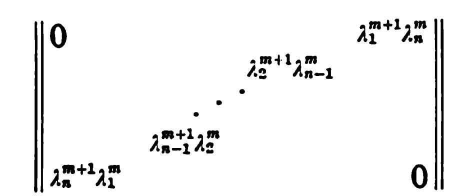
5.4.29. $\begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.30. $\begin{Vmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{Vmatrix}$,

c_i sont les nombres de Fibonacci; $c_{-1}=0$; $c_0=1$; $c_k=c_{k-1}+c_{k-2}$.



pour $k=2m$ et



pour $k=2m+1$.

5.4.33. Si l'on désigne la matrice donnée par A, on a pour $B=A^k$, avec $k<n$: $b_{i,\,i+k}=1$, $i=1, \ldots, n-k$; les autres éléments b_{ij} sont nuls. Si $k \geq n$, alors $B=0$.

5.4.34. Si l'on désigne la matrice donnée par A, on a pour $B=A^k$ avec $k<n$: $b_{i,\,i+k}=1$, $i=1, \ldots, n-k$; $b_{i,\,i+k-n}=1$, $i=n-k+1, \ldots, n$; les autres éléments b_{ij} sont nuls. Pour $k=n$, on obtient $A^n=E$. Mais si $k>n$, en mettant k sous la forme $k=np+m$, on obtient $A^k=A^m$.

5.4.42. $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}$.

5.4.43. $\begin{Vmatrix} a & b & c & \ldots & h \\ & a & b & \cdot & \cdot \\ & & a & \cdot\,\cdot & \cdot \\ & & & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ & & & \cdot\,\cdot & c \\ & & & & \cdot\; b \\ 0 & & & & a \end{Vmatrix}$.

5.4.44. n, où n est l'ordre de la cellule de Jordan.

5.4.46. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

5.4.54. n^2. Il ne faut calculer que n éléments qui déterminent totalement la matrice circulante.

5.4.55. $2(m_1+m_2)+1$.

5.4.60. $\alpha=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.

5.4.61. $n(n+2)$ si l'on part de la représentation de la matrice AB sous la forme $AB=(\beta x)v$, où $\beta=y_1u_1+\ldots+y_nu_n$. Alors, pour calculer β, il faut n multiplications, pour calculer le vecteur colonne βx, n multiplications; pour calculer $(\beta x)v$, n^2 multiplications.

5.4.62. Composons la matrice B à partir d'un système quelconque de colonnes de base de A; composons les colonnes de B à partir des coefficients des décompositions des colonnes correspondantes de A suivant ce système.

5.4.63. Par exemple, $B=\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.64. Par exemple, $B=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.67. Une matrice quasi diagonale arbitraire aux blocs diagonaux d'ordre $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_r$ respectivement.

5.4.75. Soit $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j\times e_i=0$. D'où

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j\right)\times e_i=0.$$

En vertu de l'indépendance linéaire du système $e_1, \ldots, e_m$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j=0, \quad i=1, \ldots, m,$$

d'où $\alpha_{ij}=0$ quels que soient i, j.

5.5.1. $-\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}$.

5.5.2. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$.

5.5.3. $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$.

5.5.4. $\frac{1}{ad-bc}\begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}$.

5.5.5. $-\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{Vmatrix}$.

5.5.6. $\frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

5.5.7. $\begin{Vmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.5.8. $-\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.5.9. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.5.10. $-\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

5.5.11. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{Vmatrix}$.

5.5.12. $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{Vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{Vmatrix}$.

5.5.16. a) Oui. Un exemple : l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

où $a\neq 0$; b) non; l'équation $Ax=B$, où A est une matrice dégénérée et B une matrice non dégénérée, est irrésoluble.

5.5.22. $\begin{Vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{Vmatrix}$.

5.5.23. $\begin{Vmatrix} 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & \\ & ⋰ & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \end{Vmatrix}$.

5.5.24. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.25. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.26. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \dots & -a & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.27. $\begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^4} & \dots & (-1)^{n-1}\frac{1}{a^n} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} & \dots & (-1)^{n-2}\frac{1}{a^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \dots & (-1)^{n-3}\frac{1}{a^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a} \end{Vmatrix}$.

5.5.28. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.29. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}^T = P_{ij}$;

$$D_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\alpha} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}; \qquad L_{ij}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \dots & -\alpha & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.30. Dans la matrice inverse a) les i-ième et j-ième colonnes changent de place; b) la i-ième colonne est multipliée par le nombre $1/\alpha$; c) de la j-ième colonne on retranche la i-ième colonne multipliée par le nombre α.

$$N_i^{-1}=\left\|\begin{matrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\alpha_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\alpha_{ni} & & & 1 \end{matrix}\right\|,\quad S_i^{-1}=\left\|\begin{matrix} 1 & & -\alpha_{1i} & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & 1-\alpha_{i-1,i} & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\alpha_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\alpha_{ni} & & & 1 \end{matrix}\right\|.$$

5.5.33. $n!$

5.5.35. $\left\|\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$ **5.5.36.** $\left\|\begin{matrix} 15 & 10 & -6 & -4 \\ 10 & 5 & -4 & -2 \\ -9 & -6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|.$

5.5.37. Dans l'énoncé du problème, la matrice A ne peut être réduite à la forme triangulaire que par des transformations élémentaires de la forme c). Alors, chaque pas de la méthode de Gauss peut être interprété comme une prémultiplication de la matrice courante par la suite des matrices L_{ki}, ou, ce qui revient au même, par la matrice correspondante N_i. On obtient finalement

$$N_{n-1}\dots N_i\dots N_1A=R,$$

où R est une matrice triangulaire supérieure. D'où

$$A=(N_1^{-1}\dots N_i^{-1}\dots N_{n-1}^{-1})R.$$

Toutes les matrices N_i^{-1} sont des matrices triangulaires inférieures dont les éléments de la diagonale principale sont des unités; ceci est encore vrai pour leur produit.

5.5.40. Appliquons la méthode de Gauss pour réduire A à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale principale sont des unités. Ensuite retranchons des lignes précédentes les multiples convenables de la dernière ligne, de façon à annuler tous les éléments non diagonaux de la dernière colonne. Procédons de même avec l'avant-dernière ligne, etc.

5.5.43. Si M_i sont des matrices des transformations élémentaires qui participent à la réduction de A à la matrice unité, on a

$$M_k\dots M_1A=E,$$

c'est-à-dire

$$A^{-1}=M_k\dots M_1.$$

5.5.44. $\left\|\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|.$ **5.5.45.** $\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{matrix}\right\|.$

5.5.50. Effectuons les calculs dans l'ordre suivant : 1. $A^{-1}x$. 2. yA^{-1}. 3. $\alpha=y(A^{-1}x)$. 4. $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$. 5. $\beta(A^{-1}x)$. 6. $\beta A^{-1}BA^{-1}=(\beta A^{-1}x)(yA^{-1})$. 7. $(A+B)^{-1}$. Alors, on aura besoin de $3n^2+2n+1$ multiplications et divisions.

5.5.51.

$$\tilde{A}^{-1}=A^{-1}-\frac{\gamma}{1+\gamma c_{ji}}r_i s_j.$$

Ici c_{ji} est l'élément (j, i) de la matrice $C=A^{-1}$; r_i la i-ième colonne, et s_j la j-ième ligne de A^{-1}.

5.5.52. Notons $v=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $s=vA^{-1}$, r_n la dernière colonne de A^{-1}. Alors

$$\tilde{A}^{-1}=A^{-1}-\frac{a}{1+vr_n}r_n s.$$

5.5.53. Soit e le vecteur colonne (de même ordre que A) dont tous les éléments sont des unités. Posons $t=A^{-1}e$; $u=e^T A^{-1}$. Alors, on a :

$$\tilde{A}^{-1}=A^{-1}-\frac{a}{1+aS}tu,$$

où S est la somme des éléments de A^{-1}.

5.5.54. $$\frac{1}{(a-b)(a+b(n-1))}\left\|\begin{matrix} \alpha & -b & -b & \ldots & -b \\ -b & \alpha & -b & \ldots & -b \\ -b & -b & \alpha & \ldots & -b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b & -b & -b & \ldots & \alpha \end{matrix}\right\|,$$

$\alpha=a+b(n-2)$.

5.5.55. $$\frac{1}{n-1}\left\|\begin{matrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{matrix}\right\|.$$

5.5.56. $$\left\|\begin{matrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{matrix}\right\|.$$

5.5.57. $$-\frac{1}{t}\left\|\begin{matrix} \frac{1-a_1t}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1}{a_1a_3} & \ldots & \frac{1}{a_1a_n} \\ \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1-a_2t}{a_2^2} & \frac{1}{a_2a_3} & \ldots & \frac{1}{a_2a_n} \\ \frac{1}{a_1a_3} & \frac{1}{a_2a_3} & \frac{1-a_3t}{a_3^2} & \ldots & \frac{1}{a_3a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{a_1a_n} & \frac{1}{a_2a_n} & \frac{1}{a_3a_n} & \ldots & \frac{1-a_nt}{a_n^2} \end{matrix}\right\|,$$

où $t=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$.

5.5.60. $\begin{Vmatrix} E_k & -B \\ 0 & E_l \end{Vmatrix}$.

5.5.62. Calculons A_n^{-1} d'après la division en blocs

$$A_n^{-1} = \begin{Vmatrix} P_{n-1} & r_{n-1} \\ q_{n-1} & b \end{Vmatrix},$$

où P_{n-1} est une matrice carrée d'ordre $n-1$. De la condition $A_n A_n^{-1} = E_n$ on tire :

$$A_{n-1}P_{n-1} + u_{n-1}q_{n-1} = E_{n-1}, \qquad (\alpha)$$

$$A_{n-1}r_{n-1} + bu_{n-1} = 0, \qquad (\beta)$$

$$v_{n-1}P_{n-1} + aq_{n-1} = 0, \qquad (\gamma)$$

$$v_{n-1}r_{n-1} + ab = 1. \qquad (\delta)$$

Il s'ensuit de (β) que

$$r_{n-1} = -bA_n^{-1}u_{n-1}. \qquad (\varepsilon)$$

En portant ceci dans (δ), on trouve

$$b = \frac{1}{a - v_{n-1}A_{n-1}^{-1}u_{n-1}}.$$

Maintenant (ε) permet de calculer r_{n-1}.

Portons l'expression de P_{n-1} obtenue de (α)

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1}u_{n-1}q_{n-1},$$

dans (γ)

$$v_{n-1}A_{n-1}^{-1} - v_{n-1}A_{n-1}^{-1}u_{n-1}q_{n-1} + aq_{n-1} = 0.$$

D'où

$$q_{n-1} = -\frac{v_{n-1}A_{n-1}^{-1}}{v_{n-1}A_{n-1}^{-1}u_{n-1} - a} = -bv_{n-1}A_{n-1}^{-1}.$$

Enfin, calculons P_{n-1}:

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + bA_{n-1}^{-1}u_{n-1}v_{n-1}A_{n-1}^{-1}.$$

5.5.63. Réalisons les calculs dans l'ordre suivant : 1. $A_{n-1}^{-1}u_{n-1}$. 2. $v_{n-1}A_{n-1}^{-1}$. 3. $v_{n-1}(A_{n-1}^{-1}u_{n-1})$. 4. b 5. r_{n-1}. 6. q_{n-1}. 7. $r_{n-1}(v_{n-1}A_{n-1}^{-1})$. 8. P_{n-1}. Alors on aura besoin de $3n^2-3n+1$ multiplications et divisions.

5.5.66. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -83 & 47 & 1 & 0 & 0 \\ 55 & -94 & 0 & 1 & 0 \\ -62 & 71 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.67. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.68. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -21 \\ 3 & 12 & -92 & -279 \\ -1 & -4 & 31 & 94 \end{Vmatrix}$.

5.5.69. $\begin{Vmatrix} 14 & -8 & -21 & 12 \\ -10 & 6 & 15 & -9 \\ -35 & 20 & 56 & -32 \\ 25 & -15 & -40 & 24 \end{Vmatrix}$.

5.5.80. Examinons l'égalité

$$A_p B_p = (E_n)_p \qquad (\alpha)$$

comme un système d'équations par rapport aux éléments de la matrice B_p. Ce système est un système défini.

Appliquons au déterminant de la matrice A le théorème de Laplace :

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & j_2\ldots j_p \\ i_1 & i_2\ldots i_p\end{pmatrix}\cdot(-1)^{\sum_{s=1}^{p}(i_s+k_s)}\cdot A\begin{pmatrix} k_1' & k_2'\ldots k_{n-p}' \\ i_1' & i_2'\ldots i_{n-p}'\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases} |A|, & \text{si } \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2=0,\\ 0, & \text{si } \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2\neq 0.\end{cases}$$

En comparant les décompositions indiquées de toutes les collections $j_1, j_2, \ldots, j_p$ et $k_1, k_2, \ldots, k_p$, telles que $1\le j_1<j_2<\ldots<j_p\le n$, $1\le k_1<k_2<\ldots<k_p\le n$, on voit que les nombres

$$\frac{(-1)^{\sum_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k_1' & k_2' \ldots k_{n-p}' \\ i_1' & i_2' \ldots i_{n-p}'\end{pmatrix}}{|A|}$$

donnent la solution du système (α).

5.6.1. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$.

5.6.2. $\begin{Vmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{Vmatrix}$.

5.6.3. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots n \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\ldots 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3\ldots n \\ 0 & 0 & 0 & 3\ldots C_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots n \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{Vmatrix}$.

5.6.4. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots n \end{Vmatrix}$.

La matrice est du type $n\times(n+1)$.

b) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots\frac{1}{n} \end{Vmatrix}$.

La matrice est du type $(n+1)\times n$.

5.6.5. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$.

5.6.6. a) Les premiers r éléments de la diagonale principale valent un; tous les autres éléments sont nuls; b) les derniers $n-r$ éléments de la diagonale principale valent un; tous les autres éléments sont nuls; c) la matrice est diagonale, les premiers r éléments de la diagonale principale valent 1, les autres (-1).

5.6.8. a) $\begin{Vmatrix} -5 & -10 & -7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 5 & -20 & 33 \\ 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.6.9. a) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $A\times B^T$; c) $A\times E+E\times B^T$.

La permutation des matrices de base ne change pas la matrice a); fait remplacer la matrice b) par $B^T\times A$; fait remplacer la matrice c) par $E\times A+B^T\times E$.

5.6.10. a) $B^T\times A$; b) $E_n\times A+B^T\times E_m$. **5.6.12.** 2. **5.6.13.** 3.

5.6.14. Les dernières $n-r$ colonnes de la matrice d'opérateur sont nulles, alors que les premières r colonnes sont linéairement indépendantes.

5.6.18. a) La i-ième et la j-ième lignes; b) la k-ième et la l-ième colonnes changent de place.

5.6.19. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -4 & -5 \\ \frac{9}{4} & 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

5.6.20. $AB=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $BA=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$.

5.6.21. a) $P\times Q^T$; b) $P^{-1}\times(Q^{-1})^T$.

5.6.22. Dans la base $F_{11}, \ldots, F_{mn}$ la matrice de l'opérateur G_{AB} est

$$(P^{-1}AP)\times(QBQ^{-1})^T,$$

et la matrice de l'opérateur F_{AB} est

$$(P^{-1}AP)\times E_n+E_m\times(QBQ^{-1})^T.$$

5.6.31. Non; si $B=P^{-1}AP$, on a $(\alpha P^{-1})A(\alpha P)$ pour tout nombre non nul α.

5.6.38. Par exemple, pour les matrices

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

on a

$$AB=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad BA=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.6.40. Non. Par exemple, pour les matrices A et B données dans la solution du problème 5.6.38, $A^2=0$, $B^2=B$, bien que A et B soient équivalentes.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de l'opérateur A, alors :

6.1.3. Les valeurs propres de l'opérateur A^{-1} sont $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$.

6.1.5. Les valeurs propres de l'opérateur $A-\lambda_0 E$ sont $\lambda_1-\lambda_0, \ldots, \lambda_n-\lambda_0$.

En général :

6.1.6. c) les valeurs propres de l'opérateur $f(A)$ sont $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

6.1.7. Non.

6.1.10. Les vecteurs propres sont les vecteurs colinéaires à a. La valeur propre correspondante est zéro.

6.1.11. Les vecteurs propres sont les polynômes de degré zéro; la valeur propre correspondante est zéro.

6.1.12. Ne possède pas de vecteurs propres.

6.1.14. $(1 \ \ 1 \ldots 1)^T$.

6.1.15. La matrice $A=xy$ possède toujours la valeur propre $\lambda=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$. Si l'ordre de la matrice est supérieur à un, il existe encore la valeur propre nulle.

6.1.16. La valeur propre non nulle est n, le vecteur propre correspondant est $(1 \ \ 1 \ldots 1)^T$. Pour les composantes des vecteurs propres associées à la valeur propre nulle, on obtient l'équation

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0.$$

6.1.17. Les vecteurs propres sont les mêmes que ceux de la matrice J_n du problème 6.1.16. Les valeurs propres sont : $a+b(n-1)$, $a-b$.

6.1.18. Si $B=T^{-1}AT$ et x est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ, alors $T^{-1}x$ est le vecteur propre de la matrice B associé à la même valeur propre.

6.1.22. a) Les valeurs propres de l'opérateur de projection sont 1 et 0; de plus, L_1 est un sous-espace propre de $\lambda=1$; L_2 le sous-espace propre de $\lambda=0$; b) les valeurs propres de l'opérateur de réflexion sont 1 et -1; de plus, L_1 est le sous-espace propre de $\lambda=1$; L_2 le sous-espace propre de $\lambda=-1$.

6.1.27. Un opérateur de structure simple « étend » l'espace dans n directions linéairement indépendantes (n est la dimension de l'espace). Dans la base composée de vecteurs propres, la matrice de cet opérateur est une matrice diagonale.

6.2.1. a) $\lambda-a_{11}$; b) $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$; c) $\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+$ $+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32})\lambda-|A|$.

6.2.3. $\lambda^n-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)\lambda^{n-1}$.

6.2.4. $\lambda^n-a\lambda^{n-1}-(b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_{n-1}c_{n-1})\lambda^{n-2}$.

6.2.9. La somme des mineurs principaux d'ordre k de la matrice A^{-1} est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre $n-k$ de la matrice A, divisée par le déterminant $|A|$ $(k=1, \ldots, n-1)$. Le déterminant $|A^{-1}|$ est un nombre inverse du déterminant $|A|$.

6.2.10. Par exemple, les matrices

$$A=\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$$

ne sont pas semblables.

6.2.12. $m(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: valeurs propres de la matrice A.

6.2.15. Les valeurs propres sont les éléments diagonaux $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.

6.2.18. $\lambda^2-(2\cos\alpha)\lambda+1=0$.

6.2.19. $\lambda^3+|a|^2\lambda=0$.

6.2.20. λ^{n+1}.

6.2.21. λ^n.

6.2.24. $\lambda_1=\lambda_2=2$. Les vecteurs propres sont tous les vecteurs colonnes bidimensionnels non nuls.

6.2.25. $\lambda_1=\lambda_2=2$. Les vecteurs propres sont de la forme $\alpha(1 \ \ 1+i)^T$, $\alpha\neq 0$.

6.2.26. $\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=3$. Les vecteurs propres pour $\lambda=1$ sont de la forme $\alpha(1 \ 1 \ 1)^T$, pour $\lambda=2$, de la forme $\alpha(1 \ 0 \ 1)^T$, pour $\lambda=3$, de la forme $\alpha(1 \ 1 \ 0)^T$; $\alpha\neq 0$.

6.2.27. $\lambda_1=\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$. Les vecteurs propres pour $\lambda=3$ sont de la forme $\alpha(0 \ 1 \ -1)^T$; pour $\lambda=6$, de la forme $\alpha(3 \ 4 \ -2)^T$; $\alpha\neq 0$.

6.2.28. $\lambda_1=\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$. Les valeurs propres pour $\lambda=3$ sont de la forme $\alpha(-7 \ 5 \ -6)^T+\beta(6 \ -3 \ 3)^T$ (α et β sont non simultanément nuls); pour $\lambda=6$, de la forme $\alpha(1 \ 1 \ -3)^T$, où $\alpha\neq 0$.

6.2.29. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Les vecteurs propres sont de la forme $\alpha(1\ 1\ 0)^T+\beta(0\ 1\ 2)^T$, où α et β sont non simultanément nuls.

6.2.30. $\lambda_1=-3$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_3=1$; $\lambda_4=3$. Les vecteurs propres pour $\lambda=-3$ sont de la forme $\alpha(1\ -3\ 3\ -1)^T$; pour $\lambda=-1$, de la forme $\alpha(1\ -1\ -1\ 1)^T$; pour $\lambda=1$, de la forme $\alpha(1\ 1\ -1\ -1)^T$; pour $\lambda=3$, de la forme $\alpha(1\ -3\ 3\ -1)^T$; $\alpha\neq0$.

6.2.31. $\lambda_1=\lambda_2=0$; $\lambda_3=\lambda_4=2$. Les vecteurs propres pour $\lambda=0$ sont de la forme $\alpha(0\ 1\ 0\ -1)^T$; pour $\lambda=2$, de la forme $\alpha(0\ 1\ 0\ 1)^T$; $\alpha\neq0$.

6.2.32. $\lambda_1=\lambda_2=0$; $\lambda_3=\lambda_4=2$. Les vecteurs propres pour $\lambda=0$ sont : $\alpha(2\ -1\ 0\ 0)^T+$ $+\beta(3\ 0\ 0\ -1)^T$; pour $\lambda=2$: $\alpha(1\ -1\ 0\ 1)^T+\beta(0\ 0\ 1\ 0)^T$; α et β sont non simultanément nuls.

6.2.33. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=3$. Les vecteurs propres sont de la forme $\alpha(1\ 0\ 0\ -1)^T+$ $+\beta(0\ 0\ 1\ 0)^T$; α et β sont non simultanément nuls.

6.2.35. a) Ne possède pas de valeurs propres; b) $\lambda_1=1+2i$; $\lambda_2=1-2i$.

6.2.36. a) $\lambda_1=2$; b) $\lambda_1=2$; $\lambda_2=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6.2.37. a) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$; b) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=2+i$, $\lambda_4=2-i$.

6.2.38. a) Ne possède pas de valeurs propres; b) $\lambda_1=i$; $\lambda_2=-i$; $\lambda_3=1+i$; $\lambda_4=1-i$.

6.4.42. Dans le cas complexe, la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres de l'opérateur est égale à la dimension de l'espace. Dans le cas réel, ceci peut ne pas être vrai.

6.2.43. $\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&\sqrt{6}&-\sqrt{6}\\2&-2&0&0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&\sqrt{6}&0\\0&0&0&-\sqrt{6}\end{Vmatrix}$.

6.2.44. La matrice n'est pas de structure simple.

6.2.45. $\begin{Vmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&0\\0&-1&0&2\\0&0&0&-1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{Vmatrix}$.

6.2.46. La matrice n'est pas de structure simple.

6.2.47. $\begin{Vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&-3\\1&1&4&9\\1&-1&8&-27\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-3\end{Vmatrix}$.

6.2.48. La matrice n'est pas de structure simple.

6.2.52. λ^n-1.

6.2.53. Soit ε une valeur propre arbitraire de P, c'est-à-dire une racine n-ième arbitraire de l'unité. Le vecteur propre associé à ε à colinéarité près est de la forme $(1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ \ldots\ \varepsilon^{n-1})^T$.

6.2.54. D'après 5.4.52, toute matrice circulante est un polynôme de la matrice P du problème 6.2.52. La matrice circulante d'ordre n est caractérisée par n nombres : $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Si l'on compose le polynôme $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_{n-1}t^{n-1}$, alors les valeurs propres de la matrice circulante sont les nombres $f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)$, où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont toutes les racines n-ièmes de l'unité.

6.2.55. Les vecteurs propres de λ_i ($i=1, \ldots, m$) sont de la forme $\alpha(\lambda_i^{n-1}\lambda_i^{n-2}\ldots$ $\ldots\lambda_i^2\lambda_i\ 1)^T$, $\alpha\neq0$.

6.2.57. Le seul cas qui a besoin d'être démontré est celui où λ_0 est la valeur propre de A. Supposons que sa multiplicité soit k. Alors, le rang de $A-\lambda_0E$ est $n-k$ (la matrice est de structure simple!); le polynôme caractéristique de la matrice $A-\lambda_0E$ possédant une racine k-tuple nulle, le coefficient de λ^k de ce polynôme est différent de zéro; par

conséquent, parmi les mineurs principaux d'ordre $n-k$ il existe un mineur principal non nul.

6.2.59. $(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m)$.

6.3.5. A est un opérateur scalaire.

6.3.11. La réciproque n'est pas vraie.

6.3.16. Les sous-espaces invariants non triviaux sont : la droite à vecteur directeur a (sur laquelle est induit l'opérateur nul) et le plan orthogonal à a. L'opérateur induit sur ce plan est un opérateur de rotation de 90°.

6.3.17. Les espaces M_k, $0\leq k\leq n$, et le sous-espace nul.

6.3.19. En remettant la condition $B=P^{-1}AP$ sous la forme $PB=AP$ et en égalant dans la relation matricielle obtenue les premières colonnes, on voit que b_{11} est la valeur propre de A, alors que la première colonne de P est le vecteur propre qui lui correspond. On en tire le procédé de construction de la matrice de transformation P : trouver un vecteur propre quelconque de A, puis le compléter d'une façon arbitraire jusqu'à une matrice non dégénérée.

6.3.24. Choisissons la base de l'espace $e_1, \dots, e_n$ de façon que les premiers vecteurs de cette base $e_1, \dots, e_k$ constituent la base L. Alors, la matrice de l'opérateur A est de la forme

$$A_e=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix},$$

de plus, A_{11} est la matrice de l'opérateur induit A/L dans la base $e_1, \dots, e_k$. Supposons que A_{11} n'est pas non plus de structure simple et pour une certaine valeur propre λ, de multiplicité algébrique p, de cette matrice, $r_1=r_{A_{11}-\lambda E_k}>k-p$. Soit q la multiplicité algébrique de λ en tant que valeur propre de A_{22}; alors, $r_2=r_{A_{22}-\lambda E_{n-k}}\geq(n-k)-q$. Ainsi, λ est la valeur propre de A_e de multiplicité $p+q$, mais

$$r_{A_e-\lambda E_n}\geq r_1+r_2>k-p+(n-k)-q=n-(p+q),$$

malgré que A_e est une matrice de structure simple.

6.3.33. Le sous-espace invariant bidimensionnel est tendu sur les vecteurs $x=$ $=(0\ 1\ 1)^T$ et $y=(2\ 1\ 0)^T$.

6.3.36. La diagonale de la matrice est composée de valeurs propres de l'opérateur.

6.3.40. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

6.3.41. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$

6.3.44. Conformément aux problèmes 6.3.19 et 6.3.38, construisons la matrice P qui réduit A à la forme triangulaire, en $n-1$ étapes. De plus, à la première étape, prenons comme première colonne de la matrice de transformation $P^{(1)}$ le vecteur propre commun des matrices A et B. Alors, $A^{(1)}=(P^{(1)})^{(-1)}AP^{(1)}$ et $B^{(1)}=(P^{(1)})^{-1}BP^{(1)}$ sont de la forme

$$A^{(1)}=\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ 0 & A_{n-1} \end{Vmatrix}, \quad B^{(1)}=\begin{Vmatrix} \beta & b \\ 0 & B_{n-1} \end{Vmatrix},$$

A_{n-1} et B_{n-1} sont des sous-matrices carrées d'ordre $n-1$. La matrice

$$P^{(2)}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{Vmatrix}$$

se construit de façon que la première colonne P_{n-1} soit vecteur propre commun des matrices (commutables) A_{n-1} et B_{n-1}. En poursuivant de cette façon, calculons P comme produit de $P^{(1)}P^{(2)}\dots P^{(n-1)}$; de plus, $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes les deux matrices triangulaires supérieures.

6.3.45. Pour les opérateurs commutables A et B il existe une base de l'espace dans laquelle les matrices des deux opérateurs sont triangulaires de même forme.

6.3.48. Soient la matrice A, semblable à la matrice triangulaire R, et la matrice B à la matrice triangulaire supérieure T. Alors, $A\times B$ est semblable à $R\times T$; cette dernière est également une matrice triangulaire supérieure; de plus, sa diagonale principale est composée de toutes sortes de produits $\lambda_i\mu_j$. D'une façon analogue, $A\times E_n+E_m\times B$ est une matrice semblable à la matrice triangulaire supérieure $R\times E_n+E_m\times T$ dont la diagonale principale est composée de toutes sortes de sommes $\lambda_i+\mu_j$.

6.3.50. Choisissons la base de l'espace $e_1, \ldots, e_n$ telle que les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ forment la base L_1, et les vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ la base L_2. Alors, la matrice de l'opérateur A est quasi diagonale

$$A_e=\left\|\begin{matrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}\end{matrix}\right\|.$$

Partitionnons d'une façon correspondante la matrice B_e de l'opérateur B :

$$B_e=\left\|\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{matrix}\right\|.$$

La condition $A_eB_e-B_eA_e=0$ entraîne

$$A_{11}B_{12}-B_{12}A_{22}=0, \quad A_{22}B_{21}-B_{21}A_{11}=0.$$

Maintenant, 6.3.49 implique $B_{12}=0$, $B_{21}=0$.

6.3.51. Si A est semblable à la matrice triangulaire R, A_p est semblable à la matrice triangulaire R_p.

6.4.12. Pour $\lambda=0$, la base de l'espace principal est le vecteur $(0\ 1\ -1)^T$. Pour $\lambda=1$, la base du sous-espace principal est formée de vecteurs $(1\ 0\ 1)^T$ et $(0\ 1\ 0)^T$.

6.4.13. La seule valeur propre est $\lambda=1$. Le sous-espace principal coïncide avec l'espace arithmétique tridimensionnel.

6.4.14. Pour $\lambda=2$, la base du sous-espace principal est composée de vecteurs $(2\ -1\ 0\ 0)^T$, $(1\ 0\ 1\ 0)^T$, $(2\ 0\ 0\ 1)^T$. Pour $\lambda=-2$, la base du sous-espace principal est le vecteur $(0\ 1\ 0\ -1)^T$.

6.4.15. Pour $\lambda=-1$ la base du sous-espace principal est composée de vecteurs $(1\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ 0\ 1\ 1)^T$. Pour $\lambda=1$, la base du sous-espace principal est composée de vecteurs $(3\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ -2\ 3\ 1)^T$.

6.4.17. b) Supposons que l'indice du vecteur $(A-\lambda_jE)x$ soit k, $k<h$. Il vient

$$(A-\lambda_iE)^k(A-\lambda_jE)x=0=(A-\lambda_jE)(A-\lambda_iE)^kx.$$

Par là même le vecteur non nul $(A-\lambda_iE^k)^kx$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j, $\lambda_j\neq\lambda_i$, ce qui est impossible du fait que les sous-espaces principaux se coupent seulement suivant le vecteur nul;

c) d'une façon analogue à b), montrons que pour tout nombre α différent de λ_i, l'indice du vecteur $(A-\alpha E)x$ est le même que celui du vecteur x.

6.4.22. La cellule de Jordan transposée d'ordre n pour le nombre λ_0.

6.4.23. La base canonique est composée, par exemple, de vecteurs $e_1=(4\ 3)^T$, $e_2=(0\ 1)^T$. La forme de Jordan

$$J=\left\|\begin{matrix} 7 & 1 \\ 0 & 7\end{matrix}\right\|.$$

6.4.24. $e_1=(\ 1\ \ 1\ -1)^T$, $e_2=(-4\ -5\ \ 6)^T$, $e_3=(\ 0\ \ 0\ \ 1)^T$;
$$J=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

6.4.25. $e_1=(1\ -1\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_2=(0\ \ 1\ -1\ \ 0)^T$, $e_3=(0\ \ 0\ \ 1\ -1)^T$, $e_4=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$;
$$J=\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\end{matrix}\right\|.$$

6.4.26. $e_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_2=(3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ -1)^T$, $e_3=(3\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$, $e_4=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ -1)^T$, $e_5=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.27. $$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.28. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.29. $$\begin{Vmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 9 \end{Vmatrix}.$$

6.4.30. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.31. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6.4.32. $$\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & \alpha \end{Vmatrix}.$$

6.4.33. La forme de Jordan est une cellule de Jordan de type $n+1$ associée au nombre 0. La base canonique est $1, t, \frac{1}{2!}t^2, \dots, \frac{1}{n!}t^n$.

6.4.39. Les deux sont égaux à $(\lambda-\lambda_0)^n$, où n est la dimension de l'espace.

6.4.40. Si
$$\alpha_1(A-\lambda_0E)^k x_1+\dots+\alpha_p(A-\lambda_0E)^k x_p=0,$$
on a
$$(A-\lambda_0E)^k(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p)=0,$$
d'où (puisque $k<t$)
$$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p=0,$$
c'est-à-dire $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$.

Supposons maintenant que $y=\alpha_1(A-\lambda_0E)^k x_1+\dots+\alpha_p(A-\lambda_0E)^k x_p \in H_{t-k-1}$; alors
$$0=(A-\lambda_0E)^{t-k-1}y=(A-\lambda_0E)^{t-1}(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p);$$
par conséquent
$$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p=0$$
et $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$.

6.4.42. En appliquant aux deux membres de l'égalité
$$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p+\beta_1(A-\lambda_0E)x_1+\dots+\beta_p(A-\lambda_0E)x_p+\dots$$
$$\dots+\gamma_1(A-\lambda_0E)^{t-1}x_1+\dots+\gamma_p(A-\lambda_0E)^{t-1}x_p=0 \quad (\alpha)$$
l'opérateur $(A-\lambda_0E)^{t-1}$, on obtient
$$(A-\lambda_0E)^{t-1}(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p)=0,$$
d'où $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$. D'une façon analogue, en appliquant à (α) l'opérateur $(A-\lambda_0E)^{t-2}$, montrons que $\beta_1=\dots=\beta_p=0$, etc.

6.4.44. La base canonique, par exemple : forme de Jordan :

$$e_1=(-2\ \ 2\ \ 1\ \ 2)^T,\quad e_2=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T,\quad e_3=(1\ \ 2\ \ 1\ \ -1)^T,\quad e_4=(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

6.4.45.
$$e_1=(0\ \ 0\ \ 101\ \ 0)^T,\quad e_2=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T,\quad e_3=(101\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\quad e_4=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}99&1&0&0\\0&99&0&0\\0&0&99&1\\0&0&0&99\end{Vmatrix}.$$

6.4.46.
$$\begin{aligned}e_1&=(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_2&=(-2\ \ -3\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_3&=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_4&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 1)^T,\\ e_5&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T,\\ e_6&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T,\end{aligned}\qquad J=\begin{Vmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$$

6.4.47.
$$\begin{aligned}e_1&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T,\\ e_2&=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_3&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ -3\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_4&=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_5&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -5)^T,\\ e_6&=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T;\end{aligned}\qquad J=\begin{Vmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{Vmatrix}.$$

6.4.48. La forme de Jordan se compose de deux cellules de Jordan d'ordre k, associées au nombre 0. La base canonique est, par exemple,

$$1,\ \frac{1}{2!}t^2,\ \frac{1}{4!}t^4,\ \ldots,\ \frac{1}{(2k-2)!}t^{2k-2},\ t,\ \frac{1}{3!}t^3,\ \frac{1}{5!}t^5,\ \ldots,\ \frac{1}{(2k-1)!}t^{2k-1}.$$

6.4.50. $n=(m_t-m_{t-1})t+2(m_{t-1}-m_t-m_{t-2})(t-1)=p_1t+(p_2-p_1)(t-1)$. La forme de Jordan se compose de p_1 cellules d'ordre t et p_2-p_1 cellules d'ordre $t-1$.

6.4.51.
$$e_1=(1\ \ -2\ \ 1)^T,\quad e_2=(1\ \ 0\ \ 0)^T,\quad e_3=(0\ \ 1\ \ -1)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{Vmatrix}.$$

6.4.52.
$$e_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T,\quad e_2=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\quad e_3=(0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T,\quad e_4=(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}4&1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{Vmatrix}.$$

6.4.53.
$$\begin{aligned}e_1&=(24\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_2&=(5\ \ 7\ \ 8\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_3&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T,\\ e_4&=(4\ \ 6\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_5&=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T;\end{aligned}\qquad J=\begin{Vmatrix}-2&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{Vmatrix}.$$

6.4.54. $e_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_2=(0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_3=(1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_4=(0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T$, $e_5=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$$

6.4.55. La forme de Jordan se compose de deux cellules de Jordan associées au nombre 0; l'une d'elles est d'ordre $k+1$, l'autre, d'ordre k. La base canonique est

$$1, \frac{1}{2!}t^2, \frac{1}{4!}t^4, \ldots, \frac{1}{2k!}t^{2k}, t, \frac{1}{3!}t^3, \frac{1}{5!}t^5, \ldots, \frac{1}{(2k-1)!}t^{2k-1}.$$

6.4.56. La forme de Jordan se compose de p_1 cellules d'ordre t; p_2-p_1 cellules d'ordre $t-1$; en général, de $p_{t-k+1}-p_{t-k}$ cellules d'ordre k, $0<k<t$.

6.4.58. Non, autrement on aurait

$$m_4-m_3=2>m_3-m_2=1.$$

6.4.59. $e_1=(2\ \ 2\ \ -2\ \ -2)^T$, $e_2=(0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T$, $e_3=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$, $e_4=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

6.4.60. $e_1=(-3\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_2=(-2\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_3=(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_4=(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T$, $e_5=(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$$

6.4.61. $e_1=(24\ \ -12\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_2=(\ 6\ \ 0\ \ -2\ \ 8\ \ -4\ \ 0)^T$, $e_3=(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ -1)^T$, $e_4=(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_5=(\ 3\ \ 0\ \ -1\ \ -8\ \ 4\ \ 0)^T$, $e_6=(\ 2\ \ 0\ \ 0\ \ -3\ \ 0\ \ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{Vmatrix}.$$

6.4.62. $e_1=(-2\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 2\ \ 0)^T$, $e_2=(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 0)^T$, $e_3=(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_4=(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 1)^T$, $e_5=(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_6=(\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{Vmatrix}.$$

6.4.63. $e_1=(-2\ \ 2\ \ 2)^T$, $e_2=(\ 1\ \ 1\ \ -1)^T$, $e_3=(\ 0\ \ 1\ \ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{Vmatrix}.$$

6.4.64. $e_1=(\ 1\ \ 1\ \ 0)^T$, $e_2=(\ 0\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_3=(-1\ \ 2\ \ 2)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{Vmatrix}.$$

6.4.65. $e_1=(-4\ \ -3\ \ -4)^T,\ e_2=(\ 2\ \ 2\ \ -1)^T,\ e_3=(\ 1\ \ 0\ \ 1)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{Vmatrix}.$

6.4.66. $e_1=(1\ \ -1\ \ 2)^T,\ e_2=(0\ \ 0\ \ -1)^T,\ e_3=(0\ \ 1\ \ 0)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{Vmatrix}.$

6.4.67. $e_1=(\ 3\ \ 3\ \ -3\ \ -3)^T,\ e_2=(\ 1\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T,\ e_3=(-3\ \ -3\ \ -3\ \ -3)^T,\ e_4=(\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{Vmatrix}.$

6.4.68. $e_1=(\ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T,\ e_2=(-21\ \ -10\ \ 0\ \ 0)^T,\ e_3=(\ 0\ \ 0\ \ 3\ \ -2)^T,\ e_4=(\ 8\ \ 3\ \ -1\ \ 1)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}.$

6.4.69. $e_1=(-2\ \ -1\ \ 0\ \ 0)^T,\ e_2=(\ 1\ \ 0\ \ -2\ \ 3)^T,\ e_3=(\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T,\ e_4=(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$

6.4.70. $e_1=(2\ \ -2\ \ 2\ \ -2)^T,\ e_2=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T,\ e_3=(0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T,\ e_4=(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T;$ $J=\begin{Vmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-2\end{Vmatrix}.$

6.4.71. Chaque cellule est remplacée par une cellule transposée; les cellules elles-mêmes se disposent sur la diagonale principale dans l'ordre inverse.

6.4.72. Dans la forme de Jordan de l'opérateur A les éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont remplacés par a) $\lambda_1-\lambda_0, \ldots, \lambda_m-\lambda_0$; b) $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_m$.

6.4.75. La forme de Jordan de l'opérateur A^2 peut s'obtenir à partir de la forme de Jordan de l'opérateur A de la façon suivante : dans chaque cellule associée à $\lambda\neq 0$ remplacer λ par λ^2; chaque cellule d'ordre k associée à 0 remplacer par deux cellules d'ordre l, si $k=2l$ et par deux cellules d'ordre $l+1$ et l respectivement, si $k=2l+1$.

6.4.77. La condition $A^2=E$ entraîne que les valeurs propres de l'opérateur A ne peuvent être que les nombres 1 et -1. En vérifiant l'égalité $J^2=E$ pour la forme de Jordan J de l'opérateur A, nous trouvons que J est une matrice diagonale, c'est-à-dire que A est un opérateur de structure simple. De plus, les deux nombres 1 et -1 doivent être des valeurs propres de A, autrement, $A=-E$ ou $A=E$. En désignant par L_1 et L_2 les sous-espaces propres de l'opérateur A associés à 1 et à -1 respectivement, on obtient que A est un opérateur de réflexion dans L_1 parallèlement à L_2.

6.4.79. Le défaut de l'opérateur $A-\lambda_0E$ peut être défini à l'aide de la matrice $J-\lambda_0E$, où J est la forme de Jordan de l'opérateur A. Par ailleurs, chaque cellule J associée à λ_0 se transforme en cellule $J-\lambda_0E$ associée à 0; le défaut de cette dernière vaut 1. Les autres cellules $J-\lambda_0E$ sont non dégénérées, de façon que le défaut $J-\lambda_0E$ est égal au nombre de cellules de Jordan J associées à λ_0.

6.4.82. $\begin{Vmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$ **6.4.83.** $\begin{Vmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$

6.4.84.
$$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{Vmatrix}.$$

6.4.85.
$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{Vmatrix}.$$

6.4.86.
$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.87.
$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.88. La forme de Jordan se compose d'une cellule d'ordre $n+1$ associée au nombre 0.

6.4.89. Les formes de Jordan des deux opérateurs se confondent et se composent de trois cellules de Jordan d'ordre 3 associées au nombre 0.

6.4.91. Aucunes deux matrices des matrices A, B, C ne sont semblables.

6.4.92. A et C sont semblables entre elles et ne sont pas semblables à B.

6.4.93. A et B sont semblables entre elles et ne sont pas semblables à C.

6.4.95. Si λ est la valeur propre de A distincte de 1 et de -1, alors, $1/\lambda$ est également une valeur propre; en outre, à toutes les deux est associé le même nombre de cellules de Jordan de mêmes ordres respectifs.

6.4.98. A chaque valeur propre de la forme de Jordan de la matrice doit correspondre une seule cellule de Jordan.

6.4.100. Ecrivons la matrice quasi diagonale d'ordre mn dont la diagonale se compose de m répétitions de la matrice J. Alors, la forme de Jordan des matrices $A\times B$ et $A\times E_n+$ $+E_m\times B$ respectivement s'obtient de la façon suivante : a) pour chaque valeur propre λ_i de la matrice A non nulle, multiplions les éléments diagonaux de la i-ième cellule J par λ_i; mais si $\lambda_i=0$, remplaçons la cellule J correspondante par la matrice nulle; b) à tous les éléments diagonaux de la i-ième cellule J ajoutons λ_i. Pour les opérateurs G_{AB} et F_{AB} respectivement la forme de Jordan est la même.

6.4.101. Si α est la racine n-ième primitive de l'unité, $r=\sqrt[n]{\varepsilon}$, la forme de Jordan de A est la suivante :

$$\begin{Vmatrix} 1+r & & & & 0 \\ & 1+r\alpha & & & \\ & & 1+r\alpha^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1+r\alpha^{n-1} \end{Vmatrix}.$$

7.1.6. Si Λ est la matrice diagonale telle que $\lambda_{ii}=(e_i, e_i)$,on a

$$(A^*)_e=\Lambda^{-1}(A_e)^*\Lambda,$$

où $(A_e)^*$ est l'adjointe de la matrice A_e. En particulier, si les longueurs de tous les vecteurs e_i sont les mêmes, alors $(A^*)_e=(A_e)^*$.

7.1.7. Les éléments a_{ij} de la matrice A_e de l'opérateur A doivent vérifier les égalités

$$a_{ij}=(Ae_j, f_i);$$

d'une façon analogue, les éléments $\overset{*}{a}_{ij}$ de la matrice A_f^* de l'opérateur adjoint A^* vérifient

$$\overset{*}{a}_{ij}=(A^*f_j, e_i).$$

C'est pourquoi

$$\overset{*}{a}_{ij}=\bar{a}_{ji}.$$

7.1.8. Tout opérateur d'un espace unidimensionnel est une multiplication de chaque vecteur de l'espace par un nombre fixé (pour l'opérateur donné) α. Si l'espace est unitaire, l'opérateur adjoint est une multiplication par un nombre conjugué $\bar{\alpha}$. Dans un espace euclidien unidimensionnel, tout opérateur coïncide avec son adjoint.

7.1.9. Rotation d'un angle α dans le sens opposé.

7.1.10. $A^* = -A$.

7.1.11. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix};$

b) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix};$

c) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{Vmatrix}.$

7.1.12. a) $\begin{Vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix};$ b) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix};$ c) $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3/4 \\ 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$

7.1.13. a) $\begin{Vmatrix} 0 & -5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & 0 \end{Vmatrix};$ b) $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5/4 & 0 & 5/4 \\ -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix};$ c) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{Vmatrix}.$

7.1.19. Dans le cas complexe, $\beta_i = \operatorname{tr}(A_i^* B)$.

7.1.20. Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée de l'espace X, prenons comme vecteur f le vecteur dont les coordonnées dans cette base sont les nombres $\overline{f(e_1)}, \ldots, \overline{f(e_n)}$.

7.1.25. A^* est un opérateur de projection sur le plan $x+y+z=0$ parallèlement à l'axe Oz.

7.1.26. a) La base du noyau est le polynôme t^2; la base de l'image est constituée de polynômes t, t^2; b) la base du noyau est le polynôme $3t^2-2$; la base de l'image est constituée de polynômes t, $3t^2-2$; c) la base du noyau est le polynôme $3t^2-1$; la base de l'image est constituée de polynômes t, $3t^2-1$.

7.1.32. L'inclusion $T_{A+B} \subset T_A + T_B$ est toujours respectée. Montrons que dans l'énoncé du problème : $T_{A+B} = T_A + T_B$; à cet effet il suffit de montrer que $T_A \subset T_{A+B}$ et $T_B \subset \subset T_{A+B}$.

Soit $x \in T_{B^*}$; alors $Ax=0$ (d'après la condition $AB^*=0$) et $(A+B)x=Bx$. Si x parcourt T_{B^*}, Bx parcourt T_B; par là même, $T_B \subset T_{A+B}$. D'une façon analogue, en récrivant la condition $AB^*=0$ sous la forme $BA^*=0$, on déduit que $T_A \subset T_{A+B}$.

D'après la deuxième condition du problème et le problème 7.1.31, la somme $T_{A+B} = = T_A + T_B$ est orthogonale; donc

$$r_{A+B} = r_A + r_B.$$

D'une façon analogue on peut montrer que $T_{(A+B)^*} = T_{A^*} + T_{B^*}$, d'où, en passant aux supplémentaires orthogonaux, on obtient la deuxième proposition du problème.

7.1.34. Le sous-espace nul et les enveloppes linéaires des systèmes des polynômes $t^k, t^{k+1}, \ldots, t^n$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

7.1.35. Le sous-espace recherché est donné par la condition

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=0.$$

7.1.36. Le sous-espace recherché est donné par la condition

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=0.$$

7.1.39. a) $1, t, t^2$; b) $1/\sqrt{3}, t/\sqrt{2}, (3t^2-2)/\sqrt{6}$; c) $1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/2t, \sqrt{5/8}(3t^2-1)$.

7.1.41. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de l'opérateur A, les valeurs propres de l'opérateur A^* sont $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$.

7.1.44. Soit k la dimension de K_λ. Alors tout vecteur x de K_λ vérifie : $(A-\lambda E)^k x=0$. Si y est un vecteur arbitraire de K_μ^*, on a

$$0=((A-\lambda E)^k x, y)=(x, (A^*-\bar{\lambda}E)^k y).$$

Sur le sous-espace invariant K_μ^*, l'opérateur $A^*-\bar{\lambda}E$ est non dégénéré. C'est pourquoi l'égalité obtenue signifie que $K_\lambda \perp K_\mu^*$.

7.1.45. La forme de Jordan de l'opérateur A^* s'obtient de la forme de Jordan de A en remplaçant les éléments diagonaux par des nombres complexes conjugués.

7.1.46. La base canonique de l'opérateur de dérivation se compose, par exemple, des polynômes $2, 2t, t^2$; la base canonique de l'opérateur adjoint, des polynômes t^2, $t/2$, $1/2$.

7.1.47. Supposons que l'ordre donné des valeurs propres est $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_n}$ et qu'il faut construire la forme de Schur supérieure. Alors, prenons comme vecteur e_n le vecteur propre normé de l'opérateur A^* associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_{i_n}$. Considérons sur le supplémentaire orthogonal à e_n qui sera invariant par rapport à A, l'opérateur induit A_1 et son adjoint A_1^*. Prenons comme e_{n-1} le vecteur propre normé de A_1^* associé à $\bar{\lambda}_{i_{n-1}}$, après quoi considérons le supplémentaire orthogonal à l'enveloppe linéaire des vecteurs e_{n-1} et e_n, etc. On peut procéder à cette construction dans le « sens inverse » : prendre comme e_1 le vecteur propre normé de A associé à λ_{i_1}; considérer le supplémentaire orthogonal à e_1, invariant par rapport à A^*, etc.

7.2.20. Dans un espace euclidien la proposition indiquée n'est pas vraie. On peut donner à titre de contre-exemple tout opérateur ne possédant pas de valeurs propres et n'étant pas un opérateur normal.

7.2.22. Oui, c'est bien le cas.

7.2.29. Non, si toutes les valeurs propres de l'opérateur sont simples; oui, si au moins une valeur est multiple.

7.2.30. $\lambda_1=1+i$; $\lambda_2=1-i$. La base se compose, par exemple, de vecteurs $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)^T$; $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)^T$.

7.2.31. $\lambda_1=0$; $\lambda_2=3i$; $\lambda_3=-3i$. La base se compose, par exemple, de vecteurs $e_1=\frac{1}{3}(2 \quad 1 \quad -2)^T$; $e_2=\frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i \quad 2+6i \quad 5)^T$; $e_3=\frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i \quad 2-6i \quad 5)^T$.

7.2.32. $\lambda_1=-i$; $\lambda_2=2-i$; $\lambda_3=3-i$. La base : $e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1 \quad 2 \quad -1)^T$; $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 0 \quad 1)^T$; $e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1 \quad 1 \quad 1)^T$.

7.2.33. $\lambda_1=2$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=2i$; $\lambda_4=-2i$. La base : $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$; $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T$; $e_3=\frac{1}{2}(1\ \ -1\ \ i\ \ i)^T$; $e_4=\frac{1}{2}(1\ \ -1\ \ -i\ \ -i)^T$.

7.2.34. Non. L'opérateur de dérivation n'est pas un opérateur de structure simple.

7.2.35. Non, si $a\neq 0$. Pour $a=0$ on obtient un opérateur identique.

7.2.37. Si $x=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $y=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont des vecteurs arbitraires de R_3, le produit scalaire peut être donné par la formule :

$$(x, y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+2\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_1+2\alpha_3\beta_2+3\alpha_3\beta_3.$$

7.2.41. $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1\ \ 1\ \ 1)^T$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\ \ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$,

$$e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\ \ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T.$$

7.2.42. Par exemple, $e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1\ \ -2\ \ 1)^T$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 0\ \ -1)^T$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1\ \ 1\ \ 1)^T$.

7.2.44. Soient toutes les valeurs propres de l'opérateur A distinctes en module : $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>|\lambda_n|$, et $e_1, \ldots, e_n$ la base orthonormée de vecteurs propres correspondante. La matrice de l'opérateur AB dans cette base est normale et égale au produit des matrices A_e et B_e. En égalant (conformément à 7.2.12) les sommes des carrés des modules des éléments de la première ligne et de la première colonne de la matrice A_eB_e, on obtient

$$|\lambda_1|^2(|b_{11}|^2+|b_{12}|^2+\ldots+|b_{1n}|^2)=|\lambda_1|^2|b_{11}|^2+|\lambda_2|\,|b_{21}|^2+\ldots+|\lambda_n|\,|b_{n1}|^2.$$

Puisque B_e est également une matrice normale, il vient

$$|b_{11}|^2+|b_{21}|^2+\ldots+|b_{n1}|^2=|b_{11}|^2+|b_{12}|^2+\ldots+|b_{1n}|^2.$$

Ces égalités ne sont possibles simultanément que dans le cas où

$$b_{21}=\ldots=b_{n1}=b_{12}=\ldots=b_{1n}=0.$$

D'une façon analogue on montre que les autres éléments hors diagonaux de la matrice B_e sont nuls. Ainsi, B_e est une matrice diagonale et, par conséquent, les opérateurs A et B sont commutables.

7.2.45. En raisonnant de même que dans la démonstration 7.2.44, montrons que dans la base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur A (s'il vérifie les conditions du problème), la matrice de l'opérateur B est quasi diagonale; de plus, ses blocs diagonaux d'ordre >1 correspondent aux valeurs propres multiples de l'opérateur A. Il en résulte que les matrices d'opérateurs sont commutables.

7.2.47. Tout vecteur pour lequel on atteint ce maximum est un vecteur propre de l'opérateur A associé à la valeur propre maximale en module.

7.2.49. Non. Par exemple, pour l'opérateur unitaire U la relation $|Ux|/|x|$ est égale à un, quel que soit le vecteur x non nul.

7.3.4. Les opérateurs de multiplication par un nombre égal à l'unité en module.

7.3.6. Non. L'opérateur A est dégénéré.

7.3.8. a) Oui. b) Non.

7.3.10. Non, si l'opérateur n'est pas identique.

7.3.12. a) Le sous-espace propre pour $\lambda=1$ coïncide avec l'ensemble des polynômes pairs; le sous-espace propre pour $\lambda=-1$ coïncide avec l'ensemble des polynômes impairs; c) le sous-espace propre pour $\lambda=1$ est tendu sur le système de polynômes t^n+1, $t^{n-1}+t$, ...; le sous-espace propre pour $\lambda=-1$ est tendu sur les polynômes $t^{n-1}-1$, $t^{n-1}-t$, ... Si $n=2k-1$, les deux sous-espaces sont de dimension k; mais si $n=2k$, la dimension du premier sous-espace est $k+1$, et du second, k.

7.3.13. Le produit scalaire des polynômes $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ et $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$ peut se calculer d'après la formule

$$\begin{aligned}(f, g)=3a_0b_0-2a_0b_1-2a_0b_2\\ -2a_1b_0+2a_1b_1+a_1b_2\\ -2a_2b_0+a_2b_1+2a_2b_2.\end{aligned}$$

7.3.16. $Q_s=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} \right\|.$

7.3.18. Oui, cet opérateur sera orthogonal.

7.3.21. Soient A l'opérateur donné et $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée arbitraire. D'après l'énoncé, les vecteurs $Ae_1, \ldots, Ae_n$ sont orthogonaux deux à deux. Montrons qu'ils sont de même longueur. Si, par exemple, $\alpha_1=|Ae_1|\neq\alpha_2=|Ae_2|$, les vecteurs e_1+e_2 et e_1-e_2 sont orthogonaux et les vecteurs $A(e_1+e_2)$ et $A(e_1-e_2)$ ne le sont pas :

$$(A(e_1+e_2),\ A(e_1-e_2))=(Ae_1, Ae_1)-(Ae_2, Ae_2)=\alpha_1^2-\alpha_2^2.$$

C'est pourquoi $|Ae_i|=\alpha$ pour tout $i=1, \ldots, n$ et alors $A=\alpha U$, où U est un opérateur unitaire qui associe les vecteurs e_i aux vecteurs $(1/\alpha)Ae_i$.

7.3.34. La permutation des lignes et des colonnes de la matrice dans l'ordre inverse est une transformation unitairement semblable.

7.3.37. $\psi_1-\psi_2=(\psi_3-\psi_4)+2k\pi$.

7.3.38. $\psi_2=-\psi_3=\arg a_{ii}-\arg a_{ji}$,

$$\cos\varphi=\frac{|a_{ii}|}{\sqrt{|a_{ii}|^2+|a_{ji}|^2}},\qquad \sin\varphi=-\frac{|a_{ji}|}{\sqrt{|a_{ii}|^2+|a_{ji}|^2}}.$$

7.3.40. Multiplions à gauche la matrice donnée A par la suite des matrices unitaires élémentaires $T_{12}, T_{13}, \ldots, T_{1n}, T_{23}, \ldots, T_{n-1,n}$ pour annuler successivement tous les éléments sous-diagonaux. La matrice triangulaire supérieure obtenue est un des facteurs de la décomposition recherchée, alors que l'autre facteur est le produit $T_{12}^*T_{13}^*\ldots T_{n-1,n}^*$.

7.3.44. La longueur du vecteur w doit être égale à l'unité.

7.3.46. Les valeurs propres sont égales à 1 et à -1. De plus, $\lambda=-1$ est une valeur propre simple et les vecteurs propres qui lui correspondent sont colinéaires à w. Les vecteurs propres pour $\lambda=1$ (et le vecteur nul) forment le supplémentaire orthogonal à w.

7.3.47. Le déterminant est égal à -1.

7.3.49. $w=\left(-\sin\frac{\varphi}{2}\ \cos\frac{\varphi}{2}\right)^T.$

7.3.50. Le produit Hx doit se calculer d'après la formule

$$Hx=x-2(x, w)w.$$

Le produit scalaire (x, w) se calcule d'après (7.1.4).

7.3.51. $w=\frac{1}{|x-ke_1|}(x-ke_1)$, où $|k|=|x|=(x, x)^{1/2}$; pour le reste, le choix de k est arbitraire.

7.3.52. Choisissons d'après la matrice donnée d'ordre n, en vertu de 7.3.51, la matrice H_1 de façon que la matrice $A_1=H_1A$ soit de la forme :

$$A_1=\left\|\begin{matrix} k & \times\ldots\times \\ 0 & \hat{A}_1 \end{matrix}\right\|;$$

$\tilde{A}_1$ est la sous-matrice de type $n-1$. Construisons maintenant la matrice H_2 :

$$H_2=\begin{Vmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \tilde{H}_2 \end{Vmatrix},$$

où $\tilde{H}_2$ est la matrice de réflexion de type $n-1$, choisie de façon que tous les éléments sous-diagonaux de la première colonne de la matrice $\tilde{H}_2\tilde{A}_1$ soient nuls. Alors, les premières deux colonnes de la matrice H_2H_1A coïncident avec les colonnes de la matrice triangulaire. En poursuivant ainsi, après $n-1$ pas on obtient une matrice triangulaire supérieure. Le facteur unitaire de la décomposition recherchée est le produit $H_1H_2\ldots H_{n-1}$.

7.3.54. Si l'on désigne par $\bar{a}_1$ le vecteur colonne $(a_{21}a_{31}\ \ldots,\ a_{n1})^T$, il faut prendre comme H la matrice de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{Vmatrix},$$

où $\tilde{H}$ est la matrice de réflexion qui associe $\bar{a}_1$ au vecteur colinéaire à la colonne unité e_1 de type $n-1$. En outre, H elle-même est encore une matrice de réflexion.

7.3.55. Pour tout opérateur, il existe une base orthonormée de l'espace telle que la matrice supérieure (resp. inférieure) de cet opérateur est une matrice quasi triangulaire.

7.4.7. Dans le cas complexe, ce sont des opérateurs de multiplication par un nombre réel. Tous les opérateurs linéaires d'un espace euclidien unidimensionnel sont symétriques.

7.4.11. Oui.

7.4.15. $S_e=\dfrac{1}{9}\begin{Vmatrix} 17 & 5 & -1 \\ 5 & -7 & 5 \\ -1 & 5 & 17 \end{Vmatrix}.$

7.4.24. $H=0$.

• **7.4.34.** Soit L_k un sous-espace de dimension k arbitraire. Examinons avec L_k l'enveloppe linéaire M_{n-k+1} des vecteurs $e_k,\ e_{k+1},\ \ldots,\ e_n$. L'intersection de L_k et de M_{n-k+1} est au moins unidimensionnelle; soit x_0 un vecteur non nul de cette intersection. Alors, d'après (7.4.3),

$$\frac{(Hx_0,\ x_0)}{(x_0,\ x_0)}\leqslant\lambda_k,$$

donc,

$$\min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L_k}}\frac{(Hx,\ x)}{(x,\ x)}\leqslant\lambda_k,$$

de sorte que

$$\max_{L_k}\ \min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L_k}}\frac{(Hx,\ x)}{(x,\ x)}\leqslant\lambda_k.$$

Le fait que la relation (7.4.4) devient égalité est montré par l'enveloppe linéaire de dimension k des vecteurs $e_1,\ \ldots,\ e_k$.

D'une façon analogue on démontre (7.4.5).

7.4.35. On peut supposer, sans limiter la généralité, que la sous-matrice H_{n-1} se trouve dans les premières ligne et colonne de la matrice H. Soit $f_1,\ \ldots,f_{n-1}$ la base orthonormée des vecteurs propres de la matrice H_{n-1} associés à $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_{n-1}$ respectivement, où $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_{n-1}$. D'après (7.4.3),

$$\max_{\substack{y\neq 0\\ y\in M_{n-k}}}\frac{(H_{n-1}y,\ y)}{(y,\ y)}=\mu_k=\min_{\substack{y\neq 0\\ y\in\tilde{M}_k}}\frac{(H_{n-1},\ y)}{(y,\ y)},$$

où $\tilde{M}_k$ est tendu sur $f_1,\ \ldots,f_k$, et $\tilde{M}_{n-k}$ est tendu sur $f_k,\ \ldots,f_{n-1}$. Maintenant, à chaque colonne y de dimension $(n-1)$ faisons correspondre le vecteur colonne x de dimension n tel que

$$x=\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\frac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)} = \frac{(Hx, x)}{(x, x)}$$

pour les vecteurs correspondants y et x. Aux sous-espaces $\tilde{M}_{n-k}$ et $\tilde{M}_k$ correspondent dans un espace de dimension n les sous-espaces M_{n-k} et M_k de même dimension. C'est pourquoi le théorème de Courant-Fischer entraîne que

$$\lambda_{k+1} \leq \mu_k \leq \lambda_k.$$

7.4.36. Une valeur propre positive et une valeur propre négative.

7.4.40. Pour tout opérateur hermitien il existe une base orthonormée de l'espace telle que la matrice de cet opérateur soit tridiagonale.

7.4.42. $f_0(\lambda)=1$, $f_1(\lambda)=\lambda$, $f_2(\lambda)=\lambda^2-1$, $f_3(\lambda)=\lambda^3-2\lambda$, $f_4(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^2+1$, $f_5(\lambda)=$ $=\lambda^5-4\lambda^3+3\lambda$.

7.4.44. Raisonnons par récurrence suivant le nombre de polynômes dans le système $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$. Soit $k=1$. Alors, $f_1(\mu)$ est plus grand ou plus petit que zéro suivant que le nombre μ est plus grand ou plus petit que la racine unique $\lambda_1^{(1)}$ du polynôme $f_1(\lambda)$. Dans le premier cas, la suite

$$f_0(\mu)=1, f_1(\mu)$$

n'admet pas de changement de signes, et dans le deuxième, le changement de signes existe.

Supposons que la proposition est prouvée pour tout $k \leq r$. Les valeurs des polynômes $f_r(\lambda)$ et $f_{r+1}(\lambda)$ au point μ peuvent se calculer suivant les formules :

$$f_r(\mu)=\prod_{j=1}^{r}(\mu-\lambda_j^{(r)}), \quad f_{r+1}(\mu)=\prod_{j=1}^{r+1}(\mu-\lambda_j^{(r+1)}).$$

On voit donc que le signe de chacun des nombres $f_r(\mu)$, $f_{r+1}(\mu)$ est défini par le nombre de parenthèses négatives du produit correspondant. Le nombre de racines du polynôme $f_{r+1}(\lambda)$ à droite du point μ est ou bien égal, ou bien d'une unité plus grand que celui du polynôme $f_r(\lambda)$ [cf. 7.4.43, b)]. Dans le premier cas, le signe de $f_{r+1}(\mu)$ coïncide avec le signe de $f_r(\mu)$, et la suite

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_r(\mu), f_{r+1}(\mu)$$

admet le même nombre de changements de signes que la suite

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_r(\mu).$$

Dans le deuxième cas, les signes de $f_{r+1}(\mu)$ et de $f_r(\mu)$ sont opposés et la première suite compte un changement de signes de plus que la deuxième.

7.4.45. De même que dans 7.4.44, menons la démonstration par récurrence. Soit au début, $k=1$. Si $\mu=\lambda_1^{(1)}$, on attribue à la valeur nulle de $f_1(\mu)$ le même signe qu'au $f_0(\mu)=1$, et la suite

$$f_0(\mu), f_1(\mu)$$

n'admet pas de changement de signes.

Supposons maintenant que la proposition est établie pour tout $k \leq r$. Si μ n'est pas racine des polynômes $f_r(\lambda)$ et $f_{r+1}(\lambda)$, le passage par récurrence se fait de même que dans la démonstration de 7.4.44. Examinons les deux possibilités restantes :

a) μ est une racine du polynôme $f_r(\lambda)$. D'après 7.4.43, b), dans ce cas le nombre de racines du polynôme $f_{r+1}(\lambda)$ à droite de μ est d'une unité plus grand que celui de $f_r(\lambda)$. Les nombres $f_{r+1}(\mu)$ et $f_{r-1}(\mu)$ ont des signes opposés et la suite

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_{r-1}(\mu), f_r(\mu), f_{r+1}(\mu)$$

compte un changement de signes de plus que la suite

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_{r-1}(\mu), f_r(\mu);$$

b) μ est une racine du polynôme $f_{r+1}(\lambda)$. Dans ce cas, d'après notre règle d'attribution du signe à la valeur nulle, les deux suites mentionnées comptent le même nombre de changements de signes. En même temps, les deux polynômes $f_r(\lambda)$ et $f_{r+1}(\lambda)$ admettent à droite de μ le même nombre de racines.

7.4.46. Désignons par $S(x)$ le nombre de changements de signes de la suite numérique

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x).$$

Par condition : $S(a) \geq k$, $S(b) < k$. Posons $c = \frac{a+b}{2}$ et composons la suite

$$f_0(c), f_1(c), \ldots, f_n(c).$$

Si $S(c) \geq k$, alors λ_k appartient à l'intervalle (c, b). Mais si $S(c) < k$, alors, soit $\lambda_k = c$, soit λ_k appartient à l'intervalle (a, c).

7.4.49. L'approximation cherchée de λ_1 est 27/16.

7.4.52. b) Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

7.5.1. Non.

7.5.20. Soient λ une valeur propre quelconque de la matrice A, x le vecteur propre correspondant. On a

$$0 > (Cx, x) = (A^*Bx, x) + (BAx, x) = (Bx, Ax) + (Ax, Bx) = (\bar{\lambda} + \lambda)(Bx, x) = 2 \operatorname{Re} \lambda \cdot (Bx, x),$$

d'où $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Maintenant pour la matrice A l'unicité de la solution de l'équation de Liapounov se déduit de 6.3.49.

7.5.21. $H = 0$.

7.5.26. La proposition du problème se déduit de 7.4.19 et 6.3.51.

7.5.28. La proposition du problème se déduit de 7.4.20 et 6.3.48.

7.5.30. La matrice S est un produit de Schur des matrices définies positives H et H^T.

7.5.36. La nécessité de la condition résulte de 7.5.9. Supposons maintenant que pour la matrice H la condition du critère de Sylvester est observée. Démontrons par récurrence que la sous-matrice principale directrice H_k est définie positive.

Pour $k = 1$ ceci est évident. Si, ensuite, H_k est définie positive, les valeurs propres $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_k$ de cette seus-matrice sont positives. De 7.4.35 résulte que parmi les valeurs propres $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ de la sous-matrice H_{k+1} au moins $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont positives. Mais en vertu de la condition $\det H_{k+1} > 0$, λ_{k+1} est également positive, de façon que H_{k+1} est une matrice définie positive.

7.5.39. La matrice n'est pas non négative. **7.5.40.** La matrice n'est pas non négative. **7.5.41.** La matrice est définie positive.

7.5.42. Pour tout $\varepsilon > 0$, la matrice $H + \varepsilon E$ vérifie la condition (7.5.2); il s'ensuit que H est au moins non négative. Pourtant, le déterminant de la matrice H est positif, ce qu'on peut montrer en le calculant d'après les récurrences associant les mineurs principaux situés dans les dernières ligne et colonne de la matrice. C'est pourquoi H est définie positive.

7.5.43. La matrice est non négative. **7.5.44.** La matrice est non négative.

7.5.46. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$. **7.5.47.** $\frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

7.5.48. $\frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{Vmatrix}$. **7.5.49.** $\frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.5.53. $H \geq S$ entraîne que $S^{-1/2}HS^{-1/2} \geq E$, où $S^{-1/2} = (S^{1/2})^{-1}$. Alors, d'après 7.5.33, $S^{1/2}H^{-1}S^{1/2} \leq E$ ou $H^{-1} \leq S^{-1}$.

7.5.60. Soit x le vecteur propre normé de l'opérateur HS associé à la valeur propre γ_1. On a

$$\gamma_1=(HSx,\ x)=(Sx,\ Hx)\leq|\ Sx\ |\cdot|\ Hx\ |\leq\alpha_1\beta_1.$$

Dans la dernière transformation on utilise la relation (7.4.2).

7.5.61. a) $H=S+iK$ implique : $iS^{-1}K=S^{-1}H-E$. Les valeurs propres de la matrice $S^{-1}H$ étant positives, les valeurs propres de la matrice $iS^{-1}K$ sont réelles et supérieures à -1. Remarquons que $S^{-1}K$ est semblable à la matrice antisymétrique $S^{-1/2}KS^{-1/2}$, c'est pourquoi ses valeurs propres se situent symétriquement par rapport à zéro. Il s'ensuit que les valeurs propres de $iS^{-1}K$ sont inférieures à 1;

b) pour la démonstration il suffit de vérifier que det $(S^{-1}H)\leq 1$. On tire de a) que les valeurs propres de la matrice $S^{-1}H$ se reposent dans l'intervalle (0, 2) symétriquement par rapport à son milieu. Le produit de chaque couple symétrique de valeurs propres $1+x$, $1-x$ ne dépasse pas l'unité d'où l'égalité nécessaire. Dans le cas det $S=$det H, la matrice $S^{-1}H$ est égale à la matrice unité;

c) a) entraîne que $|\det(S^{-1}K)|<1$, d'où det $K<$det S.

7.6.1. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des nombres singuliers de l'opérateur A, alors a) A^* admet les mêmes nombres singuliers; b) les nombres singuliers de αA sont $|\alpha|\alpha_1, \ldots, |\alpha|\alpha_s$.

7.6.5. Les nombres singuliers de A^{-1} sont inverses des nombres singuliers de A.

7.6.8. $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$. **7.6.9.** $2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0.

7.6.12. Les colonnes de U forment le système orthonormé de vecteurs propres de la matrice AA^*; les colonnes de V^*, le système orthonormé de vecteurs propres de la matrice A^*A.

7.6.16. a) $A^T=V^TAU$; b) $A^*=V^*AU$; c) $A^{-1}=(PV)^*\ PA^{-1}P\ (UP)^*$, où P est la matrice des permutations suivante :

$$P=\left\|\begin{matrix}0 & & & 1\\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0\end{matrix}\right\|.$$

7.6.19. Le seul nombre singulier non nul est

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

7.6.28. Ces estimations s'obtiennent de 7.6.23, si on prend comme x les vecteurs colonnes unités.

7.6.31. Sans limiter la généralité, on considère que $\tilde{A}$ se trouve dans les premières ligne et colonne de A, du fait qu'on peut l'obtenir en commutant les lignes et les colonnes qui ne changent évidemment pas les nombres singuliers. Soit A la matrice de la forme partitionnée suivante :

$$A=\left\|\begin{matrix}\tilde{A} & B\\ C & D\end{matrix}\right\|.$$

Alors, la matrice $F=\tilde{A}\tilde{A}^*+BB^*$ est la sous-matrice principale de AA^* et ses valeurs propres indicées dans l'ordre décroissant ne dépassent pas les valeurs propres de même indice de AA^*. Comme BB^* est une matrice non négative, à son tour, les valeurs propres de $\tilde{A}\tilde{A}^*$ ne dépassent pas les valeurs propres de même indice de F. D'où la proposition nécessaire.

7.6.34. Soit L_k^0 le sous-espace de X tel que

$$\sigma_k=\min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L_k^0}}\frac{|ABx|}{|x|}.$$

Puisque

$$\frac{|ABx|}{|x|} \le \alpha_1 \frac{|Bx|}{|x|},$$

on a

$$\sigma_k \le \alpha_1 \cdot \min_{\substack{x \ne 0 \\ x \in L_k^0}} \frac{|Bx|}{|x|} \le \alpha_1 \cdot \max_{L_k} \min_{\substack{x \ne 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Bx|}{|x|} = \alpha_1 \beta_k.$$

Si dans le sous-espace L_k^0 il existe un vecteur non nul x tel que $Bx=0$, alors $\delta_k=0$ et l'inégalité $\delta_k \le \alpha_k \beta_1$ est évidente. (Remarquons que dans ce cas $\beta_n=0$ également, et la quatrième inégalité est encore observée.) Dans le cas contraire, le sous-espace BL_k^0 est de dimension k et tous les vecteurs non nuls de L_k^0 vérifient les relations

$$\frac{|ABx|}{|x|} = \frac{|ABx|}{|Bx|} \cdot \frac{|Bx|}{|x|} \le \beta_1 \frac{|A(Bx)|}{|Bx|}.$$

D'où

$$\delta_k \le \beta_1 \cdot \min_{\substack{x \ne 0 \\ x \in L_k^0}} \frac{|A(Bx)|}{|Bx|} = \beta_1 \cdot \min_{\substack{y \ne 0 \\ y \in BL_k^0}} \frac{|Ay|}{|y|} \le \beta_1 \cdot \max_{L_k} \min_{\substack{x \ne 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Ax|}{|x|} = \beta_1 \alpha_k.$$

D'une façon analogue on démontre les deux autres inégalités.

7.6.36. Toutes sortes de produits $\alpha_i \beta_j$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$.

7.6.37. $\alpha_1=\alpha_2=2$, $\alpha_3=1$. **7.6.38.** $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=1$. **7.6.39.** $\alpha_1=\alpha_2=6$, $\alpha_3=3$. **7.6.40.** $\alpha_1=9$, $\alpha_2=\alpha_3=0$. **7.6.41.** $\alpha_1=\alpha_2=5$, $\alpha_3=3$. **7.6.42.** $\alpha_1=\alpha_2=2\sqrt{2}$, $\alpha_3=\sqrt{2}$, $\alpha_4=0$. **7.6.43.** $\alpha_1=\alpha_2=3$, $\alpha_3=\alpha_4=1$. **7.6.44.** $\alpha_1=4$, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. **7.6.45.** $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=2$. **7.6.46.** $\alpha_1=\alpha_2=2\sqrt{10}$, $\alpha_3=\alpha_4=\sqrt{10}$.

7.6.47. Pour $n=1$ on obtient la forme trigonométrique du nombre complexe.

7.6.48. $H=(A^*A)^{1/2}$.

7.6.49. La décomposition polaire $A=HU$ implique $AA^*=H^2$, $A^*A=U^*H^2U$. Soit $A^*Ae_i=U^*H^2Ue_i=\alpha_i^2 e_i$. Alors, $H^2(Ue_i)=\alpha_i^2(Ue_i)$, ce qu'il fallait démontrer.

7.6.53. $H_1=(A^*A)^{1/2}$.

7.6.54. Si H et U sont commutables, on a $A^*A=AA^*=H^2$ et l'opérateur A est normal. Supposons, inversement, que A soit un opérateur normal, c'est-à-dire que $A^*A=AA^*$, et que $e_1, \ldots, e_n$ soit une base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur AA^*. Comme $AA^*=H^2$, les mêmes vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ seront également des vecteurs propres pour l'opérateur H; donc

$$(UH)e_i=U(He_i)=\alpha_i Ue_i, \quad i=1, \ldots, n. \qquad (\alpha)$$

D'autre part, il résulte de 7.6.49 que

$$H^2(Ue_i)=\alpha_i^2 Ue_i, \quad i=1, \ldots, n,$$

ou

$$(HU)e_i=H(Ue_i)=\alpha_i Ue_i, \quad i=1, \ldots, n. \qquad (\beta)$$

Les relations (α) et (β) montrent que $UH=HU$.

7.6.56. $H=-S$, $U=-E$.

7.6.57. Si on examine la matrice de dérivation dans la base $1, t, t^2, \ldots, t_n$, alors, dans cette même base, l'opérateur H possède une matrice diagonale à éléments diagonaux $1, 2, 3, \ldots, n, 0$, et l'opérateur U, la matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}.$$

Par là même U est soit un opérateur de permutation cyclique: $1 \to t^n, t \to 1, t^2 \to t, \ldots, t^n \to t^{n-1}$, soit un opérateur de permutation cyclique avec réflexion $I \to -t^n$.

7.6.58. $A_p = H_p U_p$.

7.6.59. $A \times B = (H \times K)(U \times V)$.

7.6.60. $H = \begin{Vmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{Vmatrix}, \quad U = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}.$

7.6.61.

$$H = \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

7.6.62.

$$H = \frac{\sqrt{10}}{2}\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.6.63. Soient $A = P\Lambda P^{-1}$, où Λ est une matrice diagonale, et $P = KU$ la décomposition polaire de la matrice P. Il vient

$$A = KU\Lambda U^* K^{-1} = (KU\Lambda U^* K)(K^{-1})^2.$$

En adoptant $H = KU\Lambda U^* K$, $S = (K^{-1})^2$, on obtient la représentation nécessaire.

7.6.64. Soit $A = U\Lambda V$ la décomposition singulière de la matrice A. Alors,

$$\text{tr}(AW) = \text{tr}(U\Lambda VW) = \text{tr}(\Lambda VWU) = \text{tr}(\Lambda Z),$$

où $Z = VWU$ et parcourt avec W l'ensemble tout entier des matrices unitaires. Il est évident que

$$|\text{tr}(\Lambda Z)| \leq \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

L'égalité s'obtient ici, par exemple, pour $Z = E$, c'est-à-dire $W = V^* U^*$.

7.7.1. Pour $n = 1$ on obtient l'écriture usuelle $z = a + ib$ du nombre complexe z.

7.7.2. $A = 0$. **7.7.3.** a) $A = B$; b) $A^* = B$.

7.7.7. $A = 0$.

7.7.9. $A^* = H_1 - iH_2$.

7.7.20. L'égalité $|\det A| = \det H_1$ a lieu si et seulement si $A = H_1$.

7.7.23. $S = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $K = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

7.7.25. A est un opérateur antisymétrique.

7.8.4. Si on met le polynôme $g(t)$ sous la forme $g(t) = at^n + g_{n-1}(t)$, où $g_{n-1}(t)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, les pseudo-solutions de l'équation $Af = g$ sont des images réciproques du polynôme $g_{n-1}(t)$, c'est-à-dire toutes ses primitives. La pseudo-solution normale est une primitive à terme constant nul.

7.8.5. Si le plan des pseudo-solutions des équations $Ax = b$ se met sous la forme $x = x_0 + N_A$, où x_0 est une pseudo-solution normale, alors pour a), b), c) les plans correspondants sont : a) $x = \frac{1}{\alpha} x_0 + N_A$; b) $x = ax_0 + N_A$; c) $x = x_0 + N_A$.

7.8.6. Soit x_0 la pseudo-solution normale de l'équation $Ax = b$. Alors, a) x_0 est la pseudo-solution normale de l'équation $UAx = Ub$; b) $V^* x_0$ est la pseudo-solution normale de l'équation $AVx = b$.

7.8.7. Soit r le rang de l'opérateur A et $e_1, \ldots, e_r$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Si

$$b=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_r e_r+\alpha_{r+1}e_{r+1}+\ldots+\alpha_n e_n,$$

les pseudo-solutions de l'équation $Ax=b$ sont les vecteurs de la forme

$$x=\frac{\alpha_1}{\lambda_1}e_1+\ldots+\frac{\alpha_r}{\lambda_r}e_r+\beta_{r+1}e_{r+1}+\ldots+\beta_n e_n,$$

où $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ sont des nombres arbitraires. La pseudo-solution normale est :

$$x_0=\frac{\alpha_1}{\lambda_1}e_1+\ldots+\frac{\alpha_r}{\lambda_r}e_r.$$

7.8.10. $x_0=(0\ 0\ 0)^T$. **7.8.11.** $x_0=(0\ 0)^T$.

7.8.12. $x_0=\frac{3}{4}(1\ 1\ 1\ 1)^T$. **7.8.13.** $x_0=-\frac{1}{75}(1\ 2)^T$.

7.8.14. $x_0=\frac{1}{7}(5\ 6)^T$. **7.8.15.** $x_0=\frac{1}{2}(1\ 0\ 1)^T$.

7.8.16. $x_0=\frac{1}{2}(1\ 0\ 1)^T$. **7.8.17.** $x_0=(1\ 1\ 0)^T$.

7.8.18. $x_0=\left(1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 1\ 1\right)$.

7.8.19. L'opérateur nul de Y dans X.

7.8.21. Sur le sous-espace M_{n-1} l'opérateur pseudo-inverse agit comme un opérateur de dérivation. Les polynômes de la forme at^n forment le noyau de l'opérateur pseudo-inverse.

7.8.27. Soit $B=(A^+)_{ef}$. Alors B est une matrice de type $n\times m$ telle que $b_{11}=1/\alpha_1$, $b_{22}=$ $=1/\alpha_2, \ldots, b_{rr}=1/\alpha_r$, alors que tous les autres éléments sont nuls.

7.8.32. Les valeurs propres nulles des opérateurs A et A^+ sont réciproquement inverses.

7.8.35. $A^+=U^*H^+=H_1^+U_1^*$.

7.8.45. Les opérateurs A et X sont réciproquement inverses sur le couple de sous-espaces T_{A^*} et T_A.

7.8.47. L'opérateur X doit avoir le même rang que A. Par conséquent, le sous-espace T_{A^*} est l'image de cet opérateur.

7.8.49. En plus des conditions du problème 7.8.47, l'équation $(AX)^*=AX$ montre que le noyau de l'opérateur X doit être orthogonal au sous-espace T_A. Ainsi, l'image et le noyau de X coïncident avec l'image et le noyau de A^* respectivement; de plus, sur le couple de sous-espaces T_{A^*} et T_A, les opérateurs A et X sont réciproquement inverses. D'après 7.8.26, $X=A^+$.

Dans les problèmes 7.9.1-7.9.5 la transformation des inconnues n'est pas bien définie.

7.9.1. $y_1^2+7y_2^2+y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2=-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-$ $-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$.

7.9.2. $-y_1^2-7y_2^2+5y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=\frac{2}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2$, $x_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}y_1-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$.

7.9.3. $-7y_1^2+2y_2^2$; $x_1=\frac{2}{\sqrt{21}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{3}{\sqrt{14}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{21}}y_1+\frac{2}{\sqrt{6}}y_2-\frac{2}{\sqrt{14}}y_3$, $x_3=$ $=-\frac{4}{\sqrt{21}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{14}}y_3$.

7.9.4. $y_1^2+3y_2^2-3y_3^2-y_4^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_4$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_4=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_4$.

7.9.5. $10y_1^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{10}}y_1+\frac{2}{\sqrt{10}}y_2+\frac{1}{\sqrt{10}}y_3+\frac{2}{\sqrt{10}}y_4$, $x_2=\frac{2}{\sqrt{10}}y_1-\frac{1}{\sqrt{10}}y_2+\frac{2}{\sqrt{10}}y_3-$ $-\frac{1}{\sqrt{10}}y_4$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{10}}y_1+\frac{2}{\sqrt{10}}y_2-\frac{1}{\sqrt{10}}y_3-\frac{1}{\sqrt{10}}y_4$, $x_4=\frac{2}{\sqrt{10}}y_1-\frac{2}{\sqrt{10}}y_2-\frac{2}{\sqrt{10}}y_3+\frac{1}{\sqrt{10}}y_4$.

7.9.12. Appliquons la démonstration par récurrence suivant le nombre n. Pour $n=1$, la proposition est évidente. Supposons qu'elle soit vraie pour $n=k$. Examinons la forme de $k+1$ inconnues, et soient A_{k+1} sa matrice, A_k la sous-matrice principale directrice d'ordre k. A_{k+1} et A_k étant des matrices non dégénérées, d'après 7.4.35, A_{k+1} possède soit une valeur propre positive, soit une valeur propre négative de plus que la matrice A_k. Dans le premier cas, le signe de D_{k+1} est le même que celui de D_k, et la suite $1, D_1, \ldots$ $\ldots, D_k, D_{k+1}$ compte une coïncidence de signes de plus que la suite $1, D_1, \ldots, D_k$. Dans le deuxième cas, le signe de D_{k+1} est opposé à celui de D_k et on obtient un changement de signe supplémentaire.

7.9.13. Comme $D_{k-1}\neq 0$, $\lambda=0$ est une valeur propre simple de la sous-matrice principale directrice A_k. Soit l le nombre de ses valeurs propres négatives. Alors, d'après 7.4.35, le nombre de valeurs propres négatives de A_{k-1} est l, et de A_{k+1}, $l+1$. Donc, $D_{k-1}D_{k+1}<0$.

7.9.16. Chacun des indices d'inertie est égal à 2. **7.9.17.** L'indice d'inertie positif est 1; l'indice d'inertie négatif est 3.

7.9.18. La forme est définie positive.

7.9.19. La forme F se ramène à la forme $F=y_1^2+G$, où G est la forme quadratique mais seulement des variables $y_2, \ldots, y_n$.

7.9.21. Par exemple, $y_1=x_1+x_2+x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

7.9.22. Par exemple, $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

7.9.23. Par exemple, $y_1=x_1-x_3-2x_4$, $y_2=2x_2+x_3$, $y_3=3x_3+2x_4$, $y_4=4x_4$.

7.9.28. $$S=\begin{Vmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\0&0&1\end{Vmatrix}.$$

7.9.29. $$S=\begin{Vmatrix}3&-1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{Vmatrix}.$$

7.9.30. $$S=\begin{Vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

7.9.32. $$S=\begin{Vmatrix}1&\sqrt{2}&&&\\&1&\sqrt{2}&&0\\&&\ddots&\ddots&\\0&&&1&\sqrt{2}\\&&&&1\end{Vmatrix}.$$

7.9.34. $$S=\begin{Vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

7.9.36. n extractions de racine carrée. Le nombre de multiplications et de divisions est exprimé par le polynôme de n, dont le terme supérieur est $n^3/6$.

7.9.37. La résolution du système $Ax=b$ se ramène à la résolution de deux systèmes d'équations triangulaires : $S^T y=b$ et $Sx=y$.

7.9.38. La résolution de deux systèmes triangulaires impose $O(n^2)$ multiplications et divisions. Compte tenu de 7.9.36, on voit que la méthode de la racine carrée est à peu près deux fois plus économique que la méthode de Gauss.

7.9.43. Si la numérotation est convenable, $\lambda_i\mu_i=1$; $i=1, \ldots, n$.

7.9.45. La forme F est définie positive. La transformation des inconnues $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1+\frac{2}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3$, $z_2=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{2}{\sqrt{6}}x_2-\frac{2}{\sqrt{6}}x_3$, $z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\sqrt{2}x_3$ réduit la forme F à la forme normale, et la forme G à la forme canonique $5z_1^2+2z_3^2$.

7.9.46. Les matrices des formes F et G sont commutables. Les transformations orthogonales des inconnues $y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3$, $y_3=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{2}{\sqrt{6}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}x_3$ ramènent la forme F à la forme canonique $3y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$, et la forme G à la forme canonique $(-6)y_1^2+6y_2^2$.

7.9.47. La forme F est définie négative. La transformation des inconnues $z_1=\frac{1}{3}x_1-\frac{4}{3}x_2+x_3$, $z_2=\frac{2}{3}x_1-\frac{5}{3}x_2-2x_3$, $z_3=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-3x_3$ ramène la forme F à la forme normale, et la forme G à la forme canonique $(-5)z_1^2-2z_2^2+z_3^2$.

7.9.48. La forme G est définie positive. La transformation des inconnues $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_2-x_3$, $y_3=x_3-x_4$, $y_4=x_4$ ramène la forme G à la forme normale, et la forme F à la forme canonique $y_1^2+2y_2^2-y_3^2$.

7.9.49. Les matrices des formes F et G sont commutables. Les transformations orthogonales des inconnues $y_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$, $y_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$, $y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3$, $y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{1}{\sqrt{2}}x_4$ réduisent la forme F à la forme canonique $5y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, et la forme G à la forme canonique $y_1^2+5y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

8.1.29. Soit $\varrho(x, M)=\|x-y_0\|=\|x-y_0'\|$. Alors,

$$\varrho(x, M)\leq\left\|x-\frac{y_0+y'}{2}\right\|\leq\frac{1}{2}(\|x-y_0\|+\|x-y_0'\|)=\varrho(x, M),$$

par conséquent,

$$\left\|\frac{x-y_0}{2}+\frac{x-y_0'}{2}\right\|=\left\|\frac{x-y_0}{2}\right\|+\left\|\frac{x-y_0'}{2}\right\|.$$

D'après 2.4.13,

$$x-y_0=\lambda(x-y_0'),$$

où $\lambda>0$. D'où

$$\lambda=\frac{\|x-y_0\|}{\|x-y_0'\|}=1$$

et $y_0=y_0'$.

8.1.33. Si le nombre c indiqué n'existe pas, il existe une suite $\{x_k\}$, $x_k \in M$, telle que $|F(x_k)| > k$. Extrayons de $\{x_k\}$ la sous-suite $\{x_{k_i}\}$ qui converge vers un certain $x_0 \in M$. Alors, la fonctionnelle F étant continue, la relation $F(x_{k_i}) \to F(x_0)$ doit être observée, ce qui contredit à l'hypothèse $F(x_{k_i}) \to \infty$.

8.1.34. Adoptons

$$C = \sup_{x \in M} |F(x)|.$$

D'après 8.1.33, le nombre C est fini. Si pour aucun des x de M on n'atteint cette frontière, la fonctionnelle

$$G(x) = \frac{1}{G - |F(x)|}$$

doit être continue sur M, et ses valeurs doivent être bornées, ce qui contredit à la définition du nombre C.

8.1.35. $c_1^{-1} = \max\limits_{\substack{m(x) \leq 1 \\ x \neq 0}} n(x), \quad c_2 = \max\limits_{\substack{n(x) \leq 1 \\ x \neq 0}} m(x).$

8.1.36. $\| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \| x \|_2,$

$\| x \|_\infty \leq \| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty,$

$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \sqrt{n} \| x \|_\infty.$

8.1.37. Poser c_1 égal au nombre singulier minimal, et c_2 au nombre singulier maximal de la matrice P.

8.1.41. Introduisons le produit scalaire dans X de façon que L_1 et L_2 soient orthogonaux. Soient z_0 le point limite de N et $\{z_k\}$ la suite des vecteurs de N convergente vers z_0. Si $z_k = x_k + y_k$, $x_k \in M_1$, $y_k \in M_2$, et $z_0 + y_0$ la décomposition du vecteur z_0 suivant les sous-espaces L_1 et L_2, on a

$$| z_k - z_0 |^2 = | x_k - x_0 |^2 + | y_k - y_0 |^2,$$

d'où $x_k \to x_0$ et $y_k \to y_0$. Vu la fermeture de M_1 et M_2, on a $x_0 \in M_1$, $y_0 \in M_2$, $z_0 \in N$.

8.1.45. La longueur du vecteur est duale à elle-même par rapport au produit scalaire qui l'engendre.

8.1.46. $m^*(x) = \| x \|_1 = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$.

8.1.47. L'inégalité (8.1.4) du couple de normes $\|x\|_p$ et $\|x\|_q$ est l'inégalité de Hölder.

8.1.49. Il suffit d'examiner les vecteurs x_0 tels que $m(x_0) = 1$. Chacun de ces vecteurs est un point limite de la boule unité de la norme $m(x)$. Dans les cours d'analyse convexe, on prouve que pour tout point limite x_0 d'un ensemble convexe M, il existe ce qu'on appelle un «hyperplan d'appui», donné par l'égalité $\mathrm{Re}\,(x, y) = c$ (où y est un vecteur fixé) et muni de la propriété $\mathrm{Re}\,(x_0, y) = c$ et $\mathrm{Re}\,(x, y) \leq c$ pour tous les autres x de M. En appliquant ce théorème au cas considéré, construisons pour le vecteur donné x_0 l'hyperplan d'appui $\mathrm{Re}\,(x, y) = c$. Le vecteur y qui détermine cet hyperplan sera précisément le vecteur recherché.

8.2.2. Oui, si l'opérateur est non dégénéré. Non, s'il est dégénéré.

8.2.3. Dans le cas d'un opérateur dégénéré, la proposition peut être fausse.

8.2.5. Soit $M_1 = M \cap T_A$. M_1 est lui-même fermé étant une intersection des ensembles fermés. Introduisons dans les espaces considérés des produits scalaires. L'image réciproque de M (ou, ce qui revient au même, M_1) est l'ensemble des plans $x + N_A$, où x parcourt l'ensemble $A^+ M_1$. Puisque l'opérateur A^+ envisagé seulement sur T_A est non dégénéré, $A^+ M_1$ est un ensemble fermé (cf. 8.2.3). Maintenant, la proposition nécessaire résulte de 8.1.41.

8.2.15. a) La norme spectrale de la matrice diagonale est égale aux éléments diagonaux les plus grands en module; b) la norme spectrale de la matrice quasi diagonale est égale à la norme spectrale maximale des blocs diagonaux.

8.2.17. $\sqrt{n}$. **8.2.18.** $\| A \|_E^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$.

8.2.23. La partie réelle (resp. imaginaire) du nombre complexe z est le point de l'axe réel (resp. imaginaire) le plus proche de z.

8.2.24. Cette égalité est analogue à la formule du module du nombre complexe $z=x+iy$.

8.2.25. Soit U une matrice unitaire arbitraire. Alors,

$$\|H-U\|_E^2=\operatorname{tr}((H-U)^*(H-U))=\operatorname{tr} H^2+n-2\operatorname{Re}\operatorname{tr}(HU).$$

D'après 7.6.64,

$$-\operatorname{tr} H\leq \operatorname{Re}\operatorname{tr}(HU)\leq \operatorname{tr} H,$$

de plus, l'égalité à droite ne s'obtient que pour $U=E$, et à gauche, que pour $U=-E$.

Dans le cas où H est une matrice non négative, la proposition est vraie; pourtant, les matrices unitaires, la plus proche et la plus éloignée, peuvent ne pas être bien définies.

8.2.26. Pour le nombre complexe non nul $z=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, le nombre $r_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$ est le point le plus proche, et le nombre $r_2=-(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ le point le plus éloigné du cercle unité.

8.2.30. a) $\|A\|_1=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|$; b) $\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$. Les valeurs des deux normes sur la matrice diagonale D sont égales au module maximal des éléments diagonaux d_{ii}.

8.2.33. $N(A)=M(PAP^{-1})$.

8.2.35. Si $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$, $y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)^T$, alors

$$\|A\|_\infty=(\max_i|\alpha_i|)\cdot\left(\sum_{i=1}^n|\beta_i|\right).$$

8.2.38. Toute matrice B de rang 1 pouvant être mise sous la forme de produit xy^*, où x et y sont des vecteurs colonnes, alors en utilisant (8.1.4), on obtient

$$\max_{r_B=1}\frac{|\operatorname{tr}(AB)|}{M(B)}=\max_{x,y\neq0}\frac{|\operatorname{tr}(Axy^*)|}{M(xy^*)}=\max_{x,y\neq0}\frac{|(Ax,y)|}{m(x)m^*(y)}\leq$$

$$\leq\max_{x,y\neq0}\frac{m(Ax)m^*(y)}{m(x)m^*(y)}=\max_{x\neq0}\frac{m(Ax)}{m(x)}=M(A).$$

D'après 8.1.49, pour le vecteur fixé x il existe un vecteur y tel que

$$|(Ax,y)|=m(Ax)m^*(y).$$

En choisissant convenablement x, y, ramenons les relations ci-dessus aux égalités.

8.2.40. La démonstration est donnée par la chaîne des égalités suivantes :

$$M^*(A^*)=\max_{m^*(y)=1}m^*(A^*y)=\max_{m^*(y)=1}\max_{m(x)=1}|(A^*y,x)|=$$

$$=\max_{m(x)=1}\max_{m^*(y)=1}|(Ax,y)|=\max_{m(x)=1}m(Ax)=M(A).$$

Nous utilisons ici la proposition 8.1.50 : $m(x)$ coïncide avec la norme duale de $m^*(y)$.

8.2.43. Supposons que la norme donnée soit concordante avec les normes vectorielles $m(x)$ et $n(x)$. 8.4.42 et 8.2.39 entraînent que $\|A\|$ doit être subordonnée à $m(x)$ et $n(x)$ de façon que

$$\|A\|=\max_{x\neq0}\frac{m(Ax)}{m(x)},\qquad(\alpha)$$

$$\|A\|=\max_{x\neq0}\frac{n(Ax)}{n(x)}.\qquad(\beta)$$

Supposons qu'il n'existe pas de constante telle que $m(x)=cn(x)$ pour tout vecteur x. En multipliant l'une des normes par un nombre convenable (ce qui, d'après 8.2.32, ne change pas la norme subordonnée), on peut obtenir que $m(x)\leq n(x)$ pour tout x; de plus, $m(x_0)=n(x_0)$ pour un certain vecteur x_0. Puisque, par hypothèse, les normes $m(x)$ et $n(x)$ ne coïncident pas, il existe un vecteur x_1 tel que $m(x_1)<n(x_1)$. On peut considérer que $m(x_0)=m(x_1)=1$.

D'après 8.1.49, il existe un vecteur y tel que

$$(x_0, y)=m(x_0)m^*(y)=m^*(y).$$

Le vecteur y peut également être normé par la condition $m^*(y)=1$. Maintenant, pour la matrice $A=x_1y^*$, on a

$$Ax_0=x_1y^*x_0=(x_0, y)x_1=x_1,$$

$$\|A\|=m(x_1)m^*(y^*)=1.$$

Si, pourtant, pour calculer $\|A\|$ on fait appel à la représentation (β), on obtient :

$$\|A\|\geq\frac{n(Ax_0)}{n(x_0)}=n(x_1)>m(x_1)=1.$$

Cette contradiction montre que les normes $m(x)$ et $n(x)$ doivent être proportionnelles.

8.2.45. Si $\|A\|$ concorde encore avec la norme $n(x)$, et $N(A)$ est la norme subordonnée correspondante, $M(A)\geq N(A)$ sur l'ensemble des matrices de rang 1. En utilisant la représentation (8.2.5), on obtient que $M(A)\equiv N(A)$ pour tout A, d'où l'on tire (cf. 8.2.43) que les normes $m(x)$ et $n(x)$ sont proportionnelles.

8.2.47. Non. Par exemple, la norme

$$M(A)=\max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}$$

satisfait à la condition du problème; pourtant, elle ne peut pas être subordonnée du fait qu'elle concorde avec deux normes non proportionnelles $\|x\|_1$ et $\|x\|_\infty$.

8.3.3. $\operatorname{cond}_\infty(A)\geq\frac{3}{2}\varepsilon^{-1}$.

8.3.5. 7.6.33 entraîne que si $\|B\|_2<\alpha_n$, la matrice $A+B$ est non dégénérée. Construisons maintenant une matrice B telle que $\|B\|_2=\alpha_n$ et que $A+B$ soit une matrice dégénérée. Soit $A=U\Lambda V$ la décomposition singulière de la matrice A; comme dans les cas courants, $\lambda_{11}\geq\lambda_{22}\geq\ldots\geq\lambda_{nn}$ et $\lambda_{nn}=\alpha_n$. Alors, la matrice B est de la forme: $B=U\tilde{\Lambda}V$, où $\tilde{\lambda}_{11}=\ldots=\tilde{\lambda}_{n-1,n-1}=0$, $\tilde{\lambda}_{nn}=-\alpha_n$.

8.3.9. Soient A la matrice dégénérée et $Ax=0$ pour le vecteur x non nul. Divisons le vecteur x suivant la partition de la matrice A :

$$x=\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_k\end{matrix}\right\|.$$

Supposons que $\|x_i\|=\max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_k\|\}$. Alors, de l'égalité

$$-A_{ii}x_i=A_{i1}x_1+\ldots+A_{i,i-1}x_{i-1}+A_{i,i+1}x_{i+1}+\ldots+A_{ik}x_k$$

on tire

$$\|x_i\|=\left\|A_{ii}^{-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}A_{ij}x_j\right\|\leq\|A_{ii}^{-1}\|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}\|A_{ij}\|\|x_j\|\leq\left(\|A_{ii}^{-1}\|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}\|A_{ij}\|\right)\|x_i\|<\|x_i\|.$$

Cette réduction à l'absurde montre que A est non dégénérée.

Pour $m=1$ on obtient le critère de la domination diagonale suivant les lignes.

8.3.10. La matrice A est non dégénérée.

8.3.12. Si D est une matrice diagonale composée d'éléments diagonaux de la matrice A, on a

$$\operatorname{cond}_\infty(D)\frac{1}{1+\alpha}\leq\operatorname{cond}_\infty(A)\leq\operatorname{cond}_\infty(D)\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

8.3.13. Si on utilise les inégalités déduites dans 8.3.12, on obtient

$$0{,}9n\leq\operatorname{cond}_\infty(A)\leq 1{,}25n.$$

8.3.14. La valeur maximale du nombre de conditionnement s'obtient pour la matrice

$$R_0=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1\\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{matrix}\right\|,$$

telle que

$$R_0^{-1}=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2}\\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-4} & 2^{n-3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-5} & 2^{n-4}\\ . & . & . & . & \dots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{matrix}\right\|,$$

C'est pourquoi $\text{cond}_\infty(R_0)=n2^{n-1}$.

8.3.15. Comme $\|A_k\|=1$, les éléments de toutes les matrices A_k sont bornés en valeur absolue et, par conséquent, tous les mineurs d'ordre $n-1$ de ces matrices le sont aussi. C'est pourquoi l'augmentation du nombre de conditionnement n'est possible qu'au dépens de la convergence de det A_k vers zéro.

8.3.18. Si $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\dots\geq|\lambda_n|$, on a

$$\text{cond}_2(A)=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

8.3.19. $\text{cond}_2(A)=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n}$.

8.3.24. $\text{cond}_E(A)=\dfrac{\|A\|_E^2}{|\det A|}=\dfrac{|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2}{|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|}$.

8.3.29. $\text{cond}_2(A)=\text{cond}_2^2(S)$.

8.3.30. Pour le système initial, $\text{cond}_2(A)\geq 1000$. La solution est : $x_1=1{,}5$; $x_2=1$; $x_3=-1$.

8.3.31. Pour la matrice A du système d'équations initial, en utilisant les inégalités 7.6.28, on peut obtenir l'estimation : $\text{cond}_2(A)>363$. Pour diminuer le nombre de conditionnement, multiplions la deuxième équation du système par 10, et la troisième par 100, après quoi effectuons le changement de variables : $y_1=x_1$; $y_2=10x_2$; $y_3=100x_3$. On obtient le système à matrice symétrique dont la solution est : $y_1=-1$; $y_2=-1$; $y_3=-1$. La solution du système initial est donc : $x_1=-1$; $x_2=-0{,}1$; $x_3=-0{,}01$.

8.3.33. Les composantes de la solution peuvent changer de 6,01. La solution du système initial : $x=-1$; $y=0$. La solution du système perturbé : $\tilde{x}=1$; $\tilde{y}=1$.

8.3.34. $\text{cond}_\infty(A)=10\,967$. La solution du système initial : $x=1$; $y=1$. La solution du système perturbé : $\tilde{x}=-12{,}9$; $\tilde{y}=-20$. La perturbation de la solution : $x-\tilde{x}=13{,}9$; $y-\tilde{y}=21$.

8.3.35. Par exemple, $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=1$.

8.3.36. Par exemple, $x_1=1$, $x_2=x_3=x_4=0$.

8.4.2. Par exemple, le disque $|z|\leq\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

8.4.6. Cette inégalité donne l'intervalle de localisation des valeurs propres à partir duquel on peut appliquer la méthode de bissection.

8.4.8. Soit $P^{-1}A_0P=\Lambda$, où Λ est la matrice diagonale composée de valeurs propres de la matrice A_0. Comme norme recherchée $\|A\|$ on peut prendre n'importe quelle norme de $\|P^{-1}AP\|_{1,2,\infty}$ [cf. 8.2.10, c)].

8.4.13. Soient $A=H_1+iH_2$ la décomposition hermitienne et $B=U^*AU$ la forme de Schur de la matrice A. Alors, la décomposition hermitienne de la matrice B est

$$B=U^*H_1U+iU^*H_2U=\tilde{H}_1+i\tilde{H}_2.$$

La diagonale principale des matrices $\tilde{H}_1$ et $\tilde{H}_2$ porte les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivement; c'est pourquoi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq \| U^* H_1 U \|_E^2 = \| H_1 \|_E^2 = \frac{1}{4} \| A + A^* \|_E^2$; pour les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ la formule est analogue.

8.4.14. Pour ce qui est des relations (8.4.3), l'égalité $4\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \| A + A^* \|_E^2$ signifie (cf. solution de 8.4.13) que $\tilde{H}_1$ est une matrice diagonale. Comme $\tilde{H}_1 = \frac{1}{2}(B + B^*)$ et B est une matrice triangulaire, l'annulation des éléments hors diagonaux de $\tilde{H}_1$ entraîne que ceci est également vrai pour B. C'est pourquoi A est une matrice normale.

8.4.15. Pour les matrices A de structure simple.

8.4.16. D'après 6.2.7, les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Comme AB est une matrice normale, on a

$$\| AB \|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \lambda_i \|^2.$$

Montrons que $\| BA \|_E = \| AB \|_E$, d'où (en vertu de 8.4.14) on déduit que la matrice BA est normale. En effet,

$$\| BA \|_E^2 = \operatorname{tr}(BA(BA)^*) = \operatorname{tr}(BAA^*B^*) = \operatorname{tr}(AA^*B^*B) = \operatorname{tr}(A^*ABB^*) = \operatorname{tr}(B^*A^*AB) = \\ = \operatorname{tr}((AB)^*AB) = \| AB \|_E^2.$$

Ici on a utilisé la normalité des matrices A et B et l'égalité $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$.

8.4.18. Dans 7.6.64 on a obtenu la représentation : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \max_W |\operatorname{tr}(AW)|$, où W est une matrice unitaire arbitraire. Soit $B = U^*AU$ la forme de Schur de la matrice A. Alors, $\operatorname{tr}(AW) = \operatorname{tr}(UBU^*W) = \operatorname{tr}(BU^*WU)$. Calculons W_0 à partir de la relation $U^*W_0U = D$, où D est la matrice unitaire diagonale telle que $b_{ii}d_{ii} = |b_{ii}| = |\lambda_i|$. Pour la matrice W_0 (définie de façon non univoque si parmi les nombres λ_i il y a des nombres nuls), $\operatorname{tr}(AW_0) = |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|$, d'où on tire l'égalité nécessaire.

8.4.19. La proposition résulte de 8.2.13, 8.2.27 et 8.4.18.

8.4.20. Si

$$|z - a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

la matrice $zE - A$ est une matrice diagonalement dominante et, par conséquent, elle est non dégénérée. C'est pourquoi z ne peut pas être valeur propre de la matrice A.

8.4.21. Ce domaine se compose de trois disques : $|z - 1{,}23| \leq 0{,}07$; $|z - 2{,}17| \leq 0{,}04$; $|z - 3{,}06| \leq 0{,}06$.

8.4.23. Par exemple, le domaine composé de trois disques : $|z - \lambda_i| \leq 0{,}012$; $i = 1, 2, 3$, où $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2{,}5$.

8.4.24. Par exemple, le domaine composé de trois disques : $|z - \lambda_i| \leq 45\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, où $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$.

8.4.27. Par exemple, $\tilde{\lambda}_1 = -0{,}5$; $\tilde{\lambda}_2 = -1$; $\tilde{\lambda}_3 = 0{,}5$; $\tilde{\lambda}_4 = 1$.

8.4.29. Par exemple, $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = -1$, $\tilde{\lambda}_3 = 1$, $\tilde{\lambda}_4 = 3$.

8.4.32. Pour la démonstration a) remplaçons les éléments a_{12}, a_{21} et a_{18}, a_{81} par des zéros. La norme spectrale de la matrice de perturbation correspondante est égale à $\sqrt{2}/N$, d'où l'on déduit a).

Pour démontrer b), considérons la matrice A comme une perturbation de la matrice quasi diagonale D aux cellules diagonales

$$D_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad D_{22} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad D_{33} = \begin{Vmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -1 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Pour la matrice de perturbation $B=A-D\|B\|_2<\|B\|_\infty=3/N$. C'est pourquoi l'intervalle

$$-3/N\leq\lambda-1\leq3/N \qquad (\alpha)$$

contient au moins trois valeurs propres de la matrice A. Pour montrer qu'elles sont exactement trois, démontrons que pour $N\geq10$ l'intervalle (α) ne coupe pas d'autres intervalles du système $|x-\lambda_i|\leq3/N$, $i=1, \ldots, n$; λ_i sont les valeurs propres de D.

Ceci est clair pour l'intervalle $|x-2|\leq3/N\leq0{,}3$. Remarquons que maintenant d'après le théorème de Gerschgorin, les valeurs propres λ_6, λ_7, λ_8 de la matrice D_{33} reposent dans les intervalles $[-1{,}3; -0{,}7]$, $[-0{,}8; -0{,}2]$, $[1{,}7; 2{,}3]$. Donc, pour $N\geq10$, les intervalles $|x-\lambda_i|\leq3/N\leq0{,}3$, $i=6, 7, 8$ restent séparés de l'intervalle (α).

8.4.36. Le vecteur $r(x)x$ est la projection du vecteur Ax sur $L(x)$.

8.4.38. Comme $|\alpha|^2+\|z\|_2^2=1$, on a $\mu_0=\mu_0|\alpha|^2+\mu_0\|z\|_2^2$. D'autre part, $\mu_0=(A\tilde{x}, \tilde{x})=\lambda_1|\alpha|^2+(Az, z)$. Ceci implique que $|\lambda_1-\mu_0||\alpha|^2=|(Az, z)-\mu_0\|z\|_2^2|\leq\varepsilon^2/a$. Comme $|\alpha|\geq\sqrt{1-\varepsilon^2/a^2}$, on en tire l'estimation nécessaire.

8.4.39. a) Par exemple, $\tilde{\lambda}_1=1$, $\tilde{\lambda}_2=2$, $\tilde{\lambda}_3=3$, $\tilde{\lambda}_4=4$; b) des vecteurs colonnes unités.

8.4.42. a) Si $Z=X^{-1}$ et z_i est la i-ième ligne de la matrice Z, on a $z_i^*=y_i$ le vecteur propre de la matrice A^* associé à la valeur propre λ_i. De plus, l'égalité matricielle $XZ=E$ entraîne que $(x_i, y_i)=1$ et $|s_i|^{-1}=\|x_i\|_2\|y_i\|_2$. Maintenant, on déduit de 7.6.28 : $\mathrm{cond}_2(X)=\|X\|_2\|X^{-1}\|_2\geq\|x_i\|_2\|y_i\|_2=1/\|s_i\|$;

b) choisissons les vecteurs x_i tels que $\|x_i\|_2=1/\sqrt{|s_i|}$. Alors, pour les lignes z_i de la matrice X^{-1} on obtient également $\|z_i\|_2=1/\sqrt{|s_i|}$. C'est pourquoi

$$\mathrm{cond}_E(X)=\|X\|_E\|X^{-1}\|_E=\|X\|_E^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|s_i|}.$$

8.4.44. Sans limiter la généralité, on peut considérer que x et y sont des vecteurs normés. Soit $C=Q^*AQ$ la forme de Schur supérieure de la matrice A, choisie de façon que $c_{11}=\lambda_1$. D'après 7.1.47, une telle forme peut être construite; en outre, comme première colonne de la matrice Q on peut prendre le vecteur x. Alors, le vecteur $z=Q^*y$ est un vecteur propre de C^* et $(e_1, z)=(Q^*x, Q^*y)=(x, y)=0$. Ainsi, la première composante du vecteur z est nulle, et la proposition nécessaire se déduit de 8.4.43.

8.4.45. La condition $C^*y=\bar{\lambda}_1y$ conduit à $\varepsilon c^*+C^*_{n-1}z=\bar{\lambda}_1z$, ou

$$C^*_{n-1}z+\varepsilon c^*\frac{z^*z}{1-|\varepsilon|^2}=(C^*_{n-1}+\frac{\varepsilon}{1-|\varepsilon|^2}c^*z^*)z=\bar{\lambda}_1z.$$

D'où la proposition du problème.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse : Editions Mir,
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U. R. S. S.

Imprimé en Union Soviétique